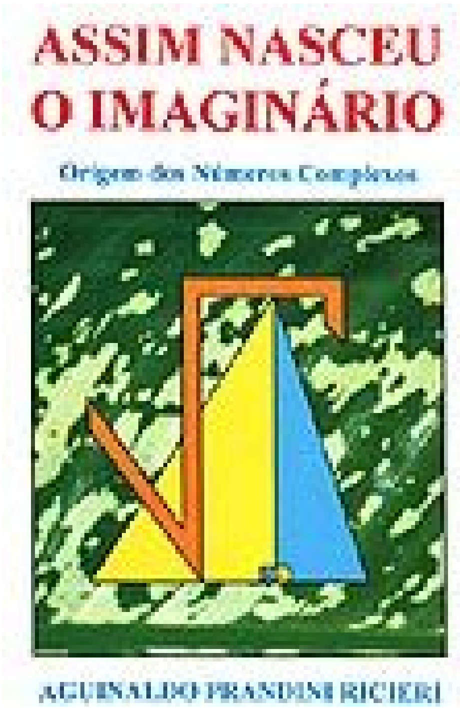
Extraído do livro

ASSIM NASCEU O IMÁGINÁRIO
Origem dos Números Complexos

Autor: AGUINALDO PRANDINI RICIERI

WWW.PRANDIANO.COM.BR



Método original de solução de equação de 2º grau

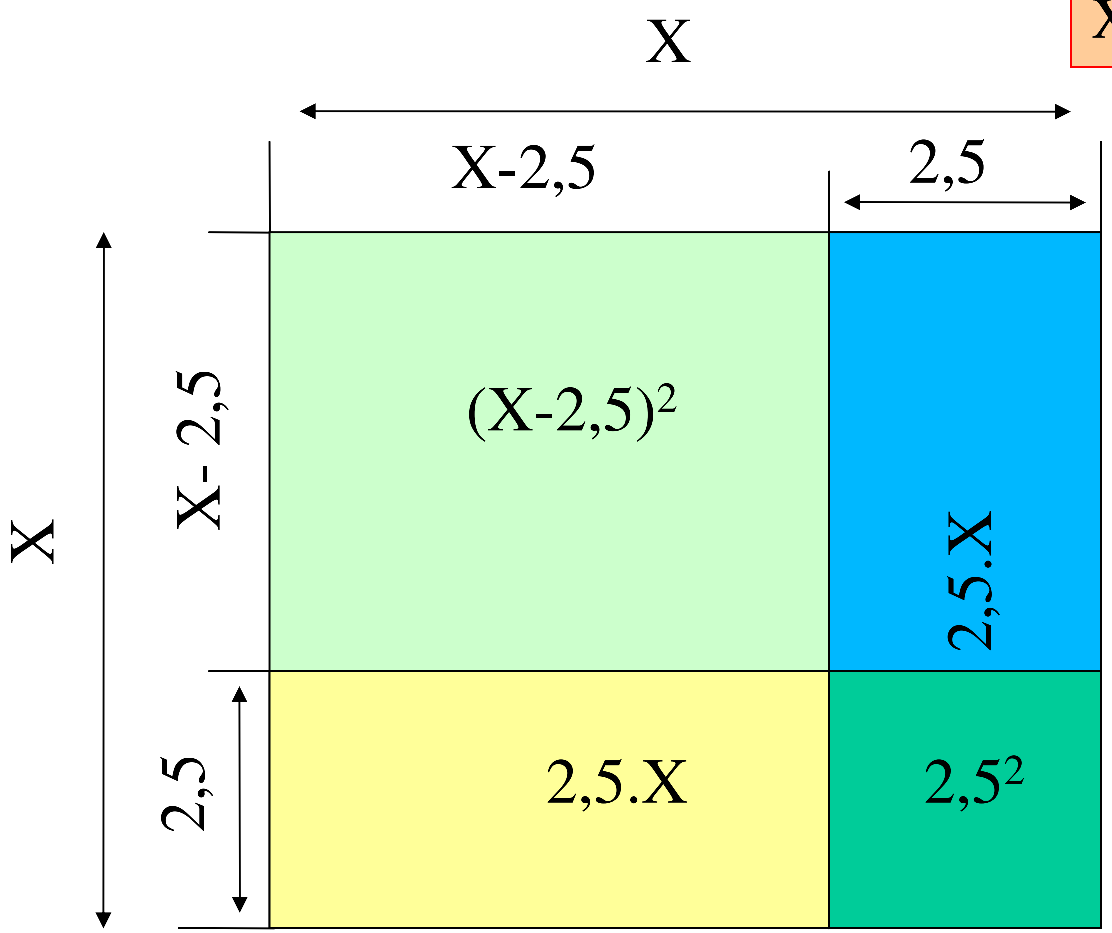
Os antigos na verdade utilizavam uma álgebra, mesclada com a geométrica .

Por exemplo vamos resolver uma equação de 2º grau do tipo

$$x^2-5x+6=0$$

$$x^2 - 5x = -6 \longrightarrow x^2 - 2{,}5x - 2{,}5x = -6$$

$$\boxed{x^2 - 2{,}5x - 2{,}5x = -6}$$



$$X^2 - 2{,}5X - 2{,}5X + 2{,}5^2$$

$$(X-2{,}5).\,(X-2{,}5)$$

$$(X-2{,}5)^2$$

$$(X-2{,}5)^2 = X^2 - 2{,}5X - 2{,}5X + 2{,}5^2$$

$$-\ 2{,}5^2 + (X-2{,}5)^2 = X^2 - 2{,}5X - 2{,}5X \qquad = -\ 6$$

$$(X-2{,}5)^2 - 2{,}5^2 = -\ 6$$

$$(X-2,5)^2 = -6 + (-2,5)^2$$

$$(X-2,5)^2 = -6 + 6,25$$

$$(X-2,5)^2 = 0,25$$

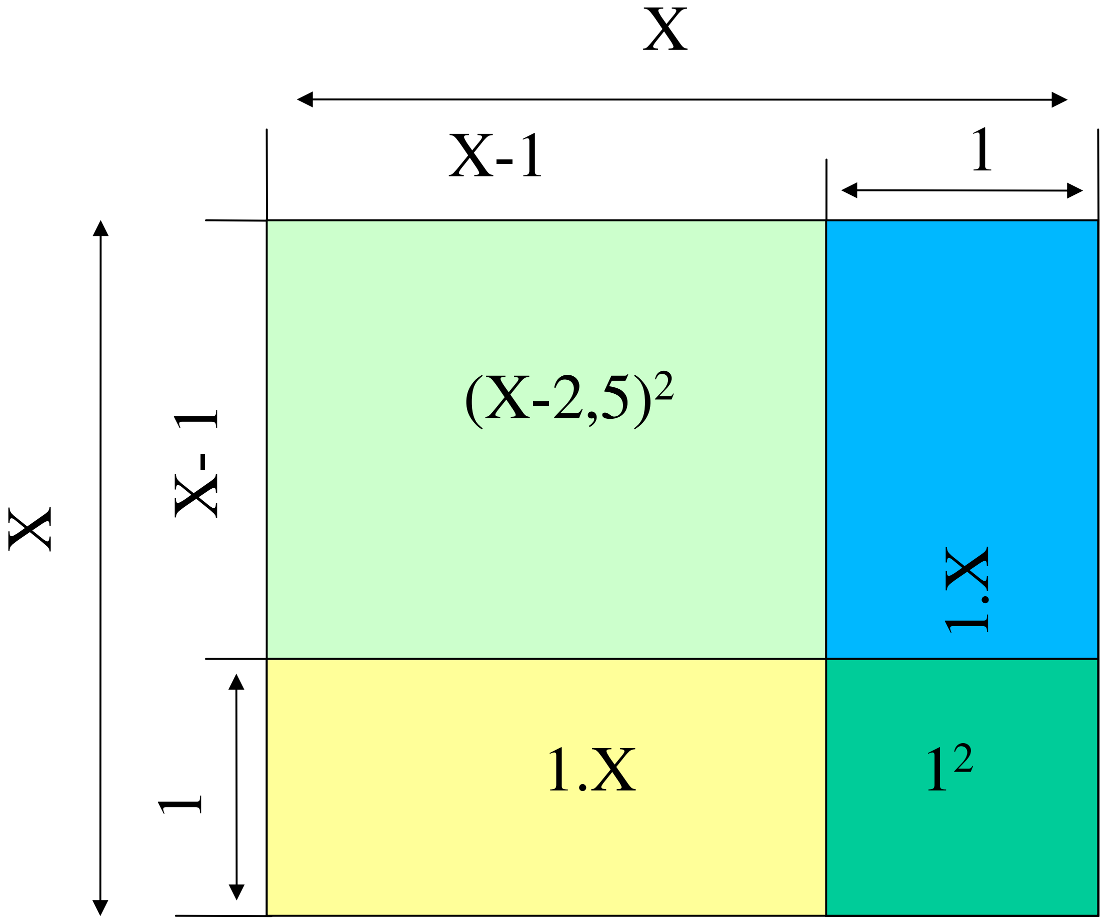
$$X - 2,5 = \sqrt{0,25}$$

$$X - 2,5 = \begin{cases} +0,5 \\ -0,5 \end{cases}$$

$$X = \begin{cases} +0,5+2,5 \\ -0,5+2,5 \end{cases} \longrightarrow X = \begin{cases} 3 \\ 2 \end{cases}$$

O problema é quando havia equações do tipo:

$x^2 - 2x + 2 = 0$ implica em: $x^2 - x - x = -2$



$X^2 - 1X - 1X + 1^2$

$(X-1).(X-1)$

$(X-1)^2$

$(X-1)^2 = X^2 - 1X - 1X + 1$

$-1 + (X-1)^2 = X^2 - 1X - 1X = -2$

$(X-1)^2 - 1 = -2$

$(X-1)^2 = -2 + 1$

$(X-1)^2 = -1$

$X + 1 = \sqrt{-1}$

Não há quantidade multiplicada por ela mesma que resulte em "-1"

Sobre isso Cardano em 1545 em seu livro, *Atis Magnae Sive de Regulis Algebraicis Liber Unicus*(Arte Magna ou sobre as regras algébricas únicas):

Quadratus et 1 aequalis 0

Notação original

$X^2+1=0$

Notação atual

Cardano escreveu:

"...que quantidades verdadeiras aparecerão para representar essa maravilha fascinante..."

Cardano chama esses números de "*numeratus ficticius*"

Em 1559 Rafael Bombelli no seu “Álgebra” propõe a solução para $x^2+1=0$:

Plus radix quadratus minus um

Minus radix quadratus minus um

Notação original

$$+\sqrt{-1}$$

$$-\sqrt{-1}$$

Notação atual

Obs: é da expressão:

radix quadratus que significa ‘ lado do quadrado” que temos hoje a expressão raiz quadrada.

No ano de 1637, René Descartes(pai do sistema cartesiano) convoca os filósofos para estudar a dúvida de Cardano, o qual chamou de:

Latim: Cogitation Studium

Francês: Étude Imaginare

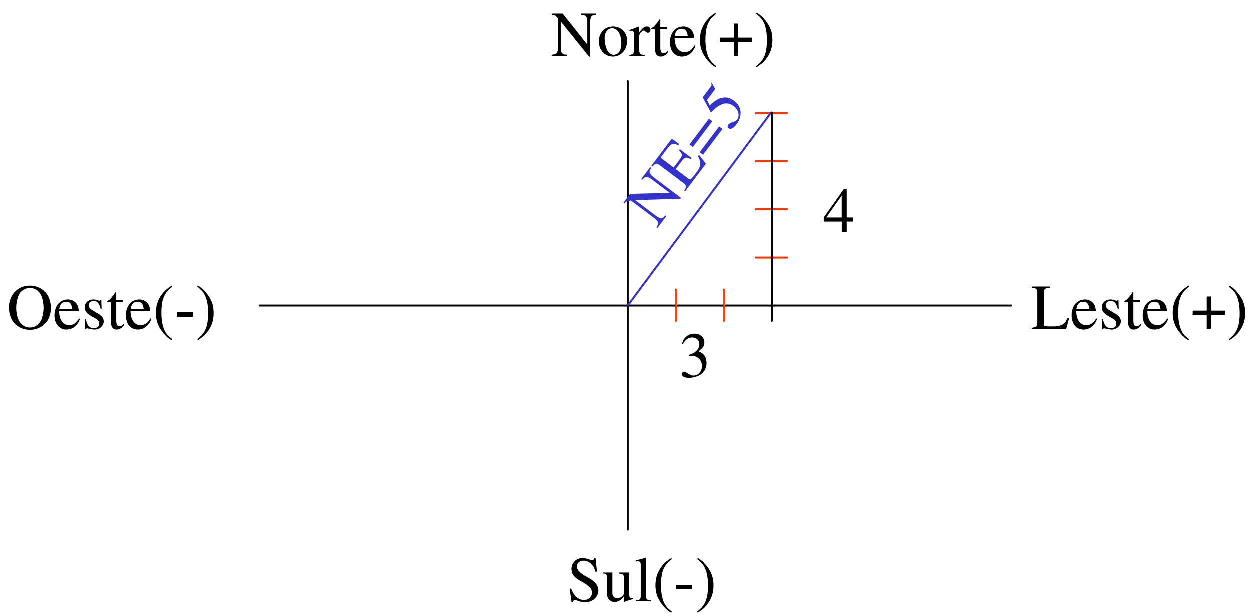
Português: Estudo Imaginário

Leibniz propôs chamar de Analise Milagrosa, no trecho abaixo ao escrever a Huygens.

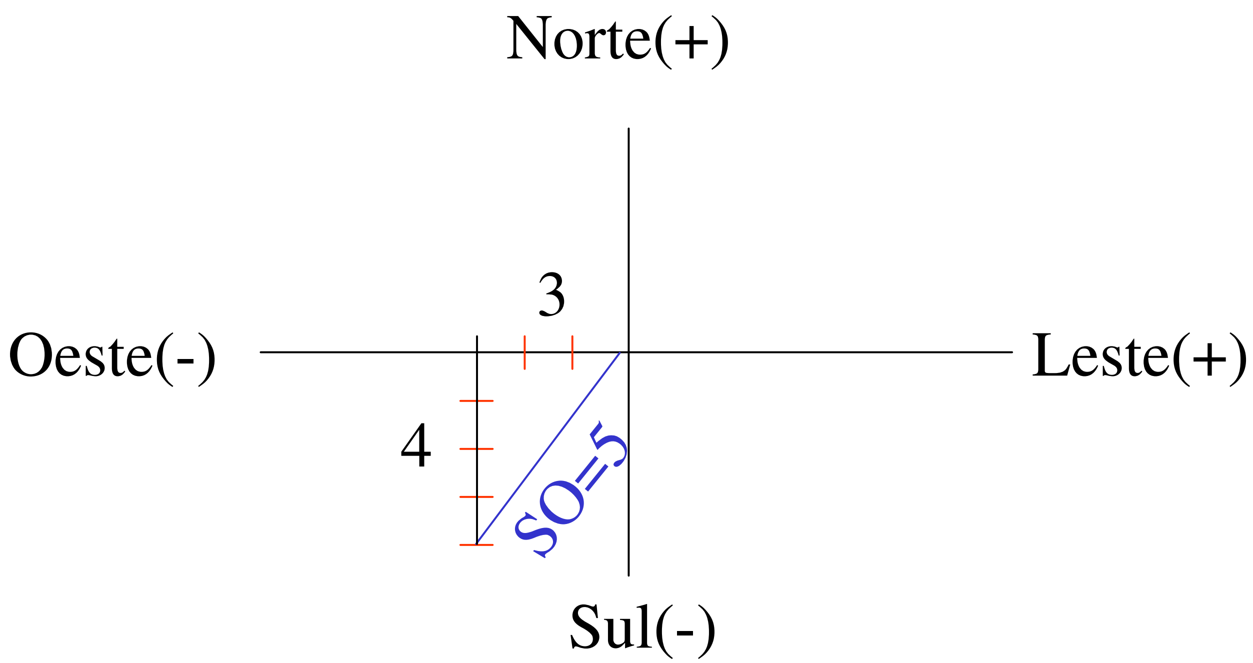
"...Descartes sempre esteve disposto a propor assuntos que não entende. Imagine, caro amigo Huygens, que sobre as raízes dos números negativos , o autor de Discours de La Méthode sugeriu o nome Etude Imaginaire. Ridículo. Analyseos Miraculum é muito mais expressivo e rico em significado..."

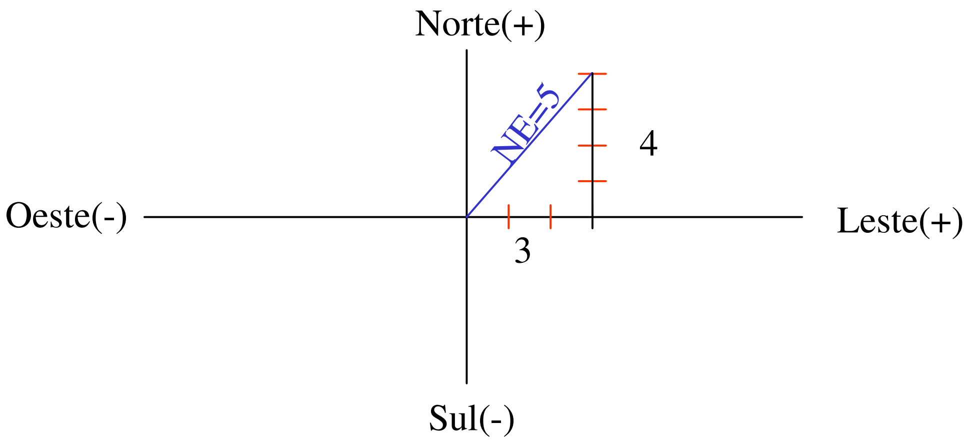
No ano de 1683 John Wallis propõe no Treatise of Algebra(Tratado de Álgebra) um estudo sobre representações de direções , tendo como base a aplicação da raiz quadrada de um número negativo, especificamente raiz de –1.

‘...suponha que um homem que se movimenta 3m para o leste e 4 m para o norte . Se diz então que seu deslocamento foi de 5 m para o nordeste



‘...se o homem se movimentar 3m para o oeste e 4 m para o sul . Ele terá se deslocado 5 m para o sudoeste...”

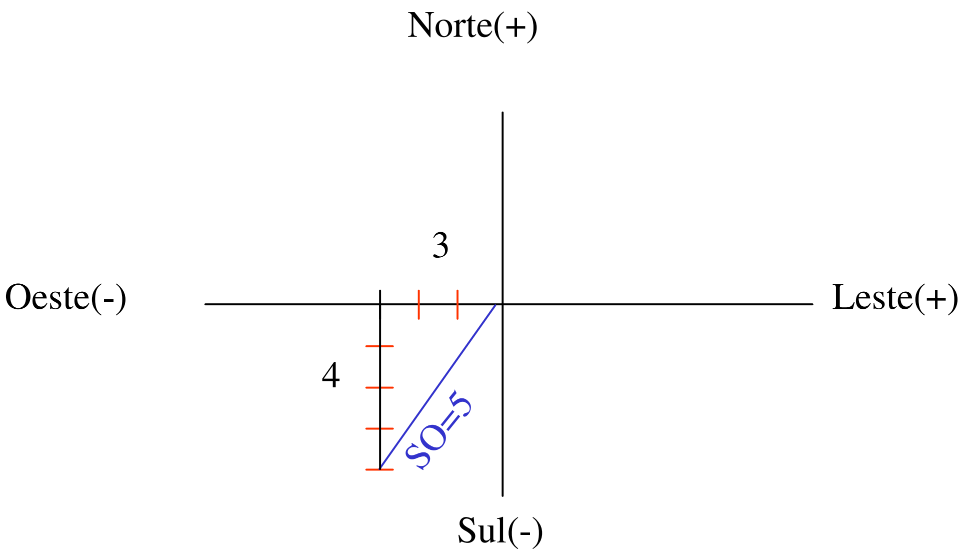




$$NE = \sqrt{(+3)^2 + (+4)^2}$$

$$NE = \sqrt{(+1)^2 \ . \ (3^2+4^2)}$$

$$NE = \sqrt{(+1)^2 \ .25} = +5$$



$$NE = \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2}$$

$$NE = \sqrt{(-1.3)^2+(-1.4^2)}$$

$$NE = \sqrt{(-1)^2.(3)^2+(-1)^2.(4)^2}$$

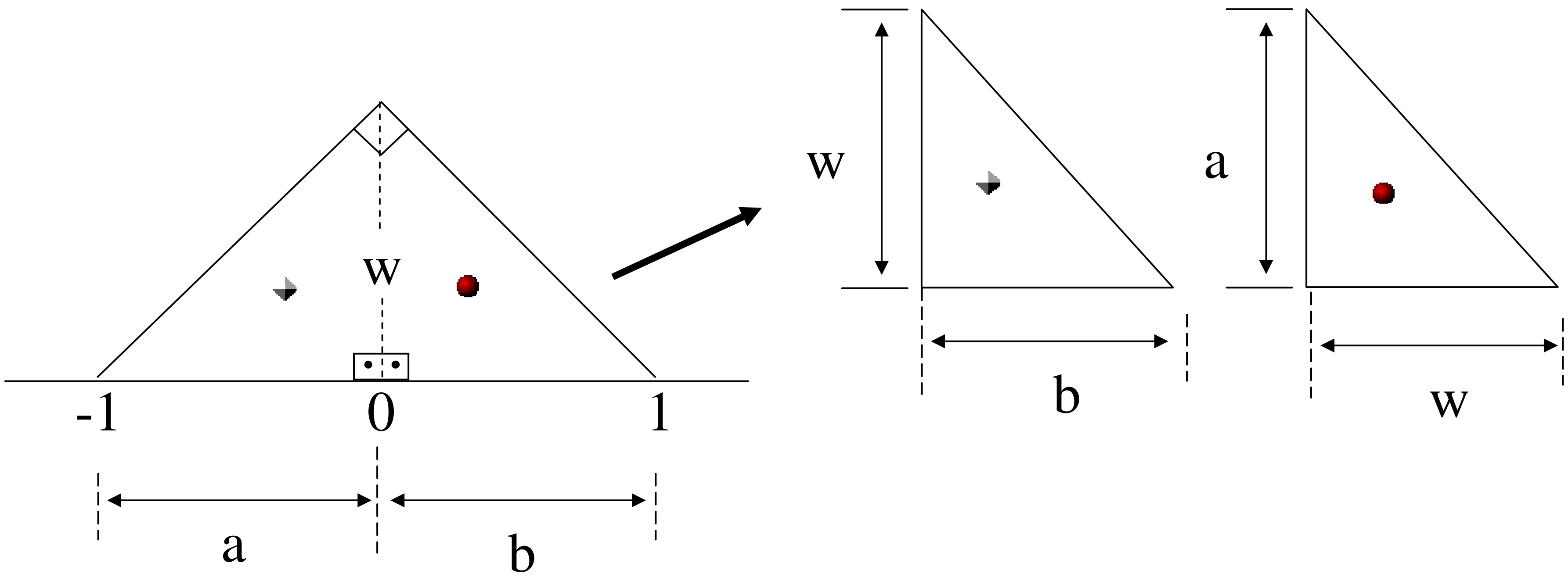
$$NE = \sqrt{(-1)^2 \ . \ (3^2+4^2)}$$

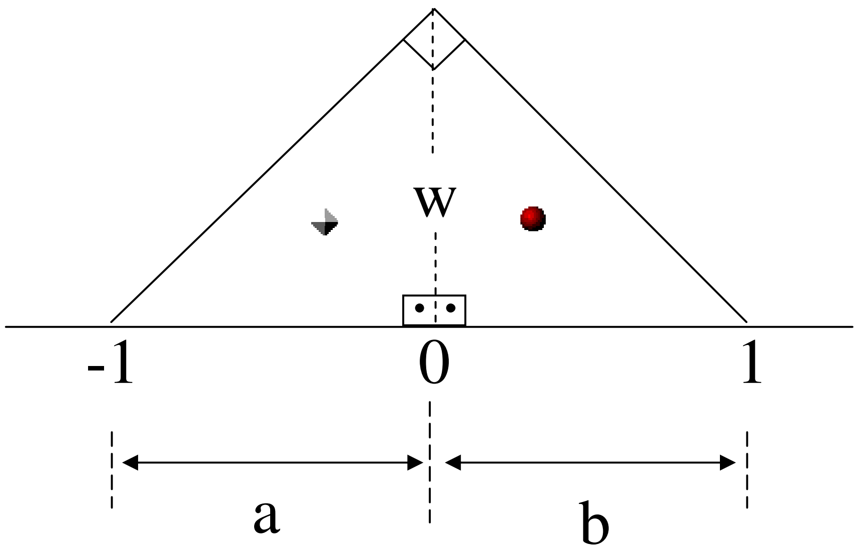
$$NE = \sqrt{(-1)^2 \ .25} = -5$$

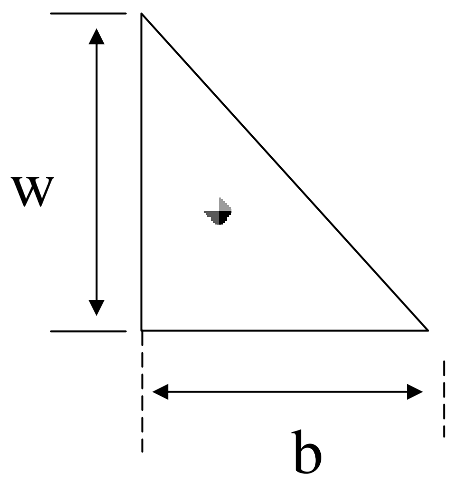
"...e isso (direção)é a verdadeira interpretação das raízes dos números negativos(imaginary root)...

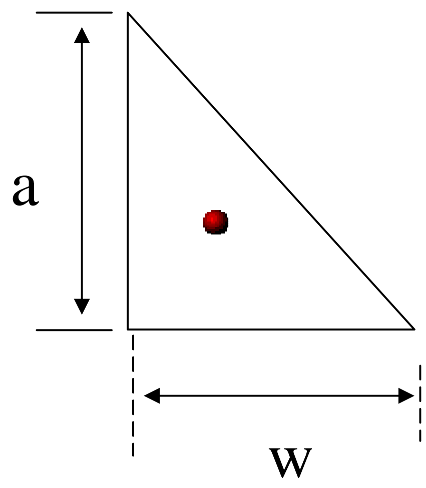
Em 1629 Albert Girard, em seu livro Invention Nouvelle em L'Algebre (Nova Invenção na Álgebra)

Girard considerou um triangulo retângulo e sua altura relativa à hipotenusa que chamou de w.









Por semelhança de triângulos temos: $\dfrac{w}{a} = \dfrac{b}{w} \longrightarrow w^2 = a \cdot b$

$\longrightarrow w^2 = (-1)\cdot(+1) \longrightarrow w^2 = -1$

$$w = \sqrt{-1}$$

Rótulo de Wessel

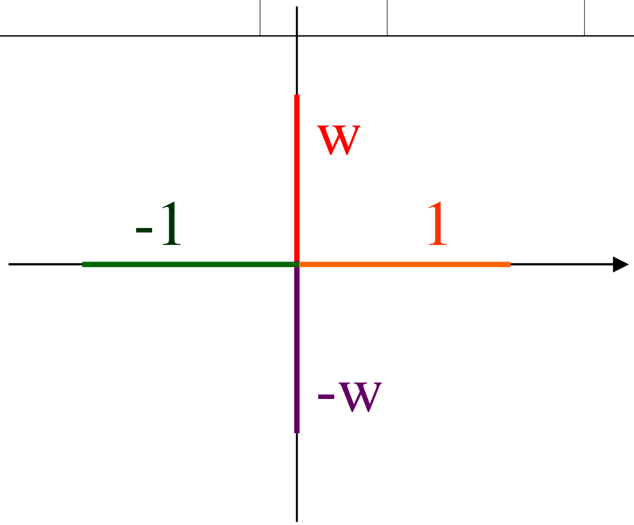
Wessel então escreve:

“...o presente estudo objetiva entre outras coisas, caracterizar direção, e para isso proponho um modo simples e prático de orientar um segmento de reta no espaço. Isto posto, rotulo $\sqrt{-1}$ de w, que por sua vez representa uma orientação espacial perpendicular ao segmento de reta designado por +1...”

Wessel também enunciou a propriedade do produto.

“...O ângulo de direção resultante da produtório de duas direções distintas é igual à soma dos ângulos de cada uma das direções envolvidas...”

Direção	+1	-1	+w	-w
Ângulo	0º	180º	90º	270º



$(+1).(+1)=(+1) \longleftrightarrow 0º+0º=0º$

$(+1).(+w)=(+w) \longleftrightarrow 0º+90º=90º$

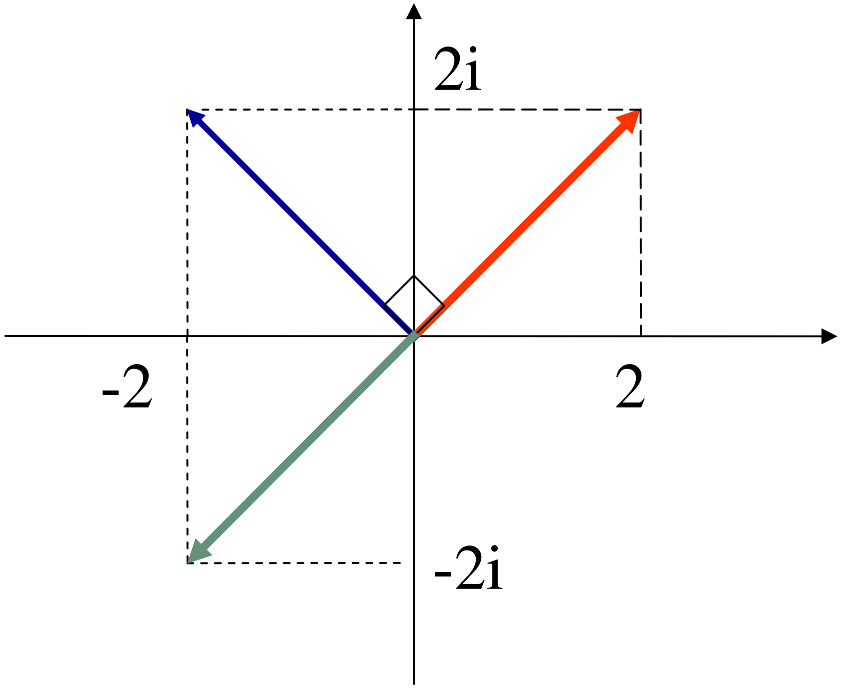
$(+w).(+w)=(-1) \longleftrightarrow 90º+90º=180º$

$(-1).(+w)=(-w) \longleftrightarrow 180º+90º=270º$

$(-w).(+w)=(+1) \longleftrightarrow 270º+90º=360$

Atualmente o W de Wessel é chamado de “i”

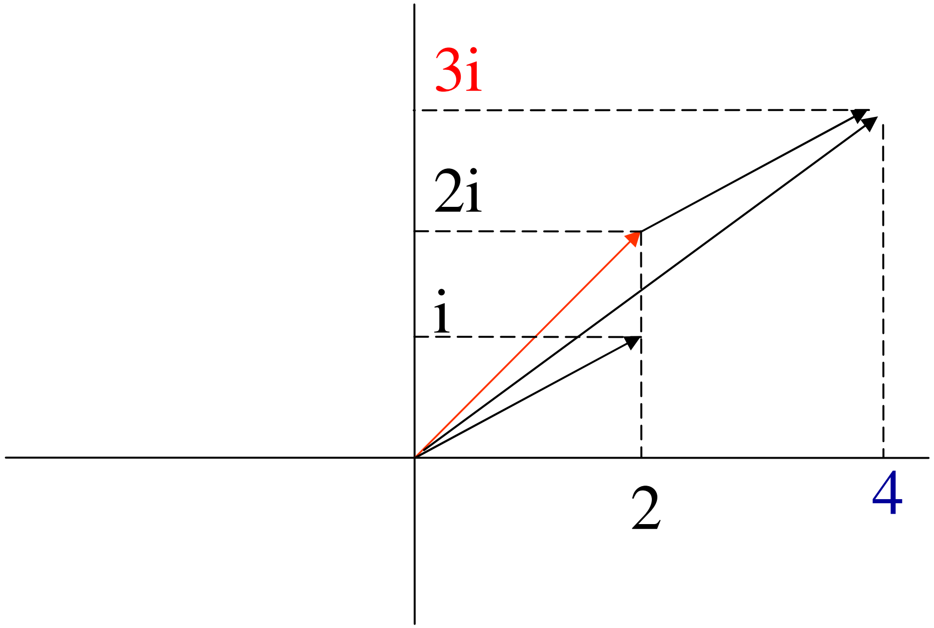
Produto de dois imaginários



$(2+2i).i = 2.i - 2$

$(2.i - 2).i = -2 - 2i$

SOMA DE DOIS IMÁGINÁRIOS

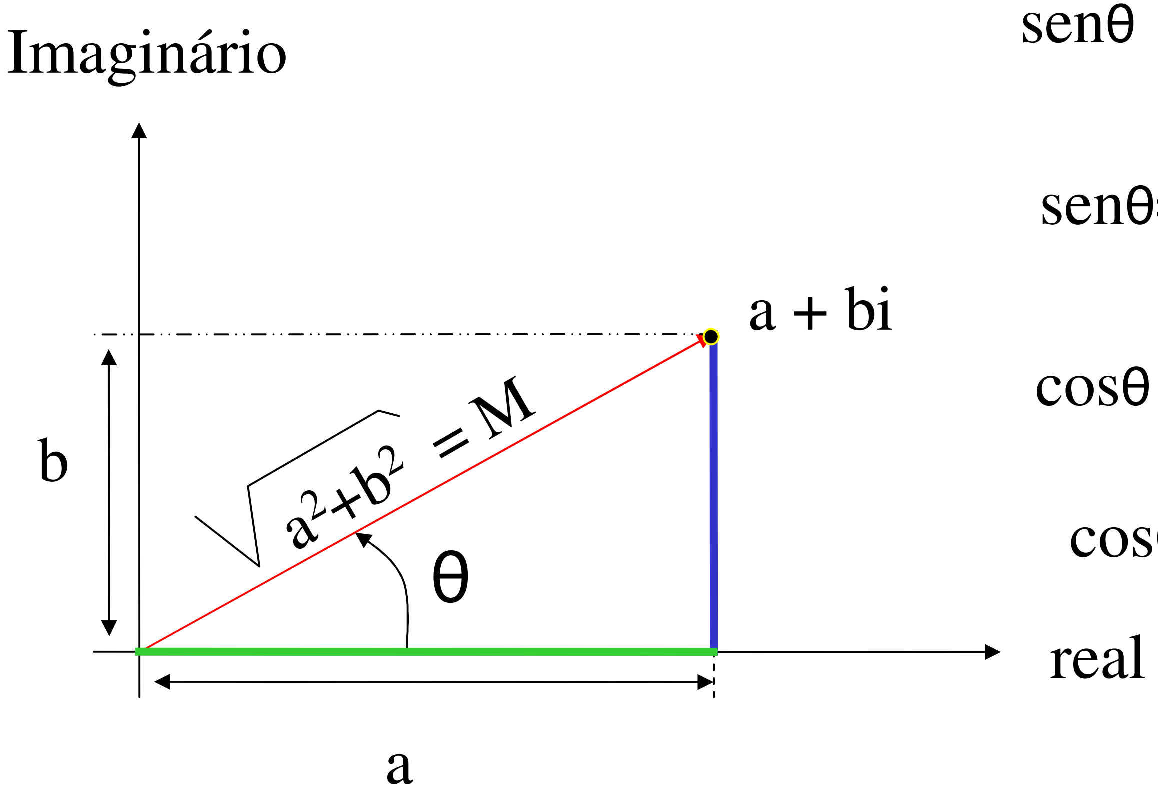


Vemos aqui que a soma dos números imaginários é igual a soma de vetores

$$(2+2i) \quad + \quad (2+i)$$

$$4 \quad + \quad 3i$$

Outra forma de expressar uma número imaginário



$$\operatorname{sen}\theta = \frac{\text{Cateto Oposto}}{\text{Hipotenusa}}$$

$$\operatorname{sen}\theta = b/M \longrightarrow \operatorname{sen}\theta.M = b$$

$$\cos\theta = \frac{\text{Cateto Adjacente}}{\text{Hipotenusa}}$$

$$\cos\theta = a/M \longrightarrow \cos\theta.M = a$$

$$a + bi$$

$$\cos\theta.M \quad + \quad i.\operatorname{sen}\theta.M$$

Colocando M em evidência temos: $(\cos\theta + i.\operatorname{sen}\theta).M$