Dipolo Linear

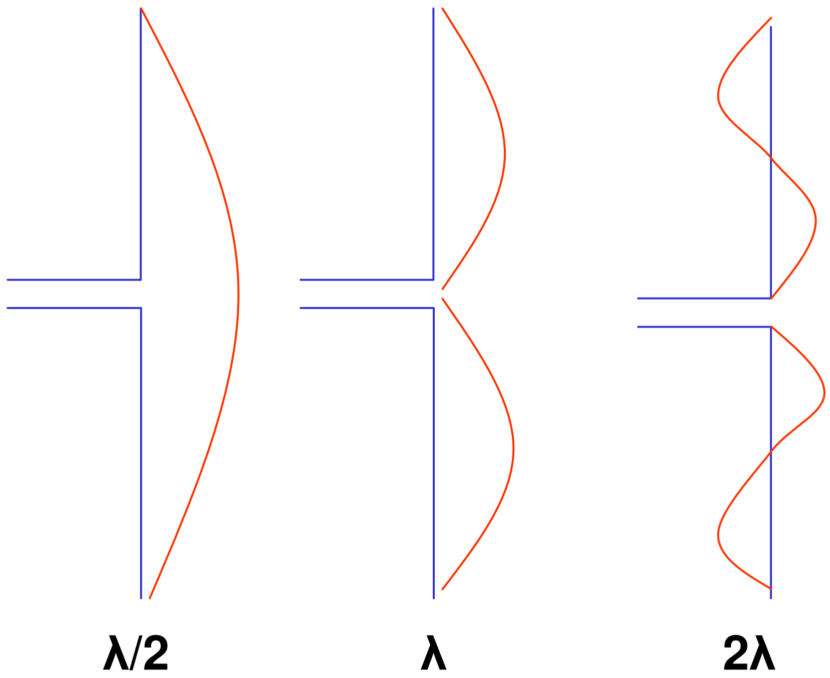
Prof. Nilton Cesar de Oliveira Borges

Comportamento da Corrente em dipolo linear.

Pode ser adotado que a corrente possui um comportamento senoidal.

Esse parâmetro é uma boa aproximação em casos onde a antena é fina, ou seja, um diâmetro em torno de $\lambda/100$.

As correntes em um dipolo curto possuem um comportamento de onda estacionária desse modo temos:



Distribuição aproximada das correntes em uma antena linear fina com comprimentos iguais a **λ/2, λ e 2λ.**

Esse modo a corrente será:

$$I = I_0 \operatorname{sen}\left[\frac{2\cdot\pi}{\lambda}\left(\frac{L}{2} \pm z\right)\right]\cdot e^{j\omega\cdot\left(t-\frac{r}{c}\right)}$$

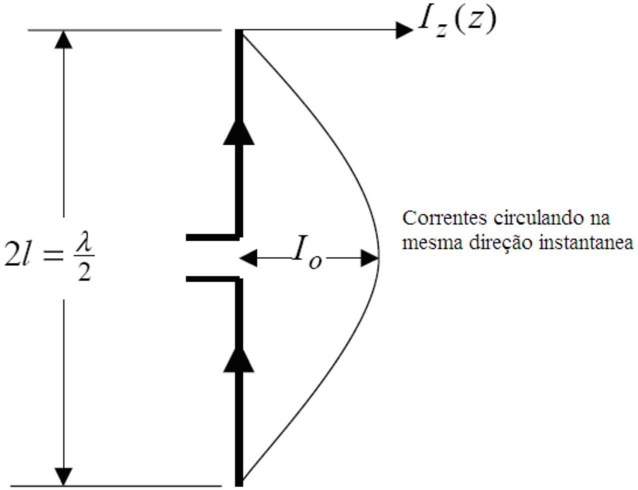
Exemplos

L=λ/2 em Z=0

$$I = I_0 \,\mathrm{sen}\left[\frac{2\cdot\pi}{\lambda}\left(\frac{\lambda/2}{2} \pm Z\right)\right]\cdot e^{j\omega\cdot\left(t-\frac{r}{c}\right)} \Rightarrow I = I_0 \underbrace{\mathrm{sen}\left[\frac{\cancel{2}\cdot\pi}{\cancel{\lambda}}\left(\frac{\cancel{\lambda}/\cancel{2}}{2}\right)\right]}_{1}\cdot e^{j\omega\cdot\left(t-\frac{r}{c}\right)} \Rightarrow$$

$$I = I_0 \cdot e^{j\omega\cdot\left(t-\frac{r}{c}\right)}$$ Nesse caso a corrente é máxima em z=0

Distribuição de corrente do dipolo de meia onda



Para qualquer tamanho de L qual será a corrente em z=L/2

$$I = I_0\,\mathrm{sen}\left[\frac{2\cdot\pi}{\lambda}\left(\frac{L}{2}\pm z\right)\right]\cdot e^{j\omega\cdot\left(t-\frac{r}{c}\right)} = I_0\,\mathrm{sen}\left[\frac{2\cdot\pi}{\lambda}\left(\frac{L}{2}\pm\frac{L}{2}\right)\right]\cdot e^{j\omega\cdot\left(t-\frac{r}{c}\right)} =$$

$$= I_0\,\mathrm{sen}\left[\frac{2\cdot\pi}{\lambda}(0)\right]\cdot e^{j\omega\cdot\left(t-\frac{r}{c}\right)} = 0$$

$$I = 0$$

Nesse caso a corrente 0, nas pontas de qualquer dipolo simétrico.

È sabido que o campo elétrico para um dipolo curto é dado por:

$$E_\theta = \frac{j \cdot \omega \cdot I_0 \cdot L \operatorname{sen}\theta \cdot e^{j\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)}}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon \cdot c^2 r}$$

Sabendo que:

$$\frac{1}{\varepsilon \cdot c} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = 120\pi\Omega \qquad \frac{\lambda}{c} = \frac{1}{f} \qquad \omega = 2 \cdot \pi \cdot f$$

A equação do campo Elétrico fica:

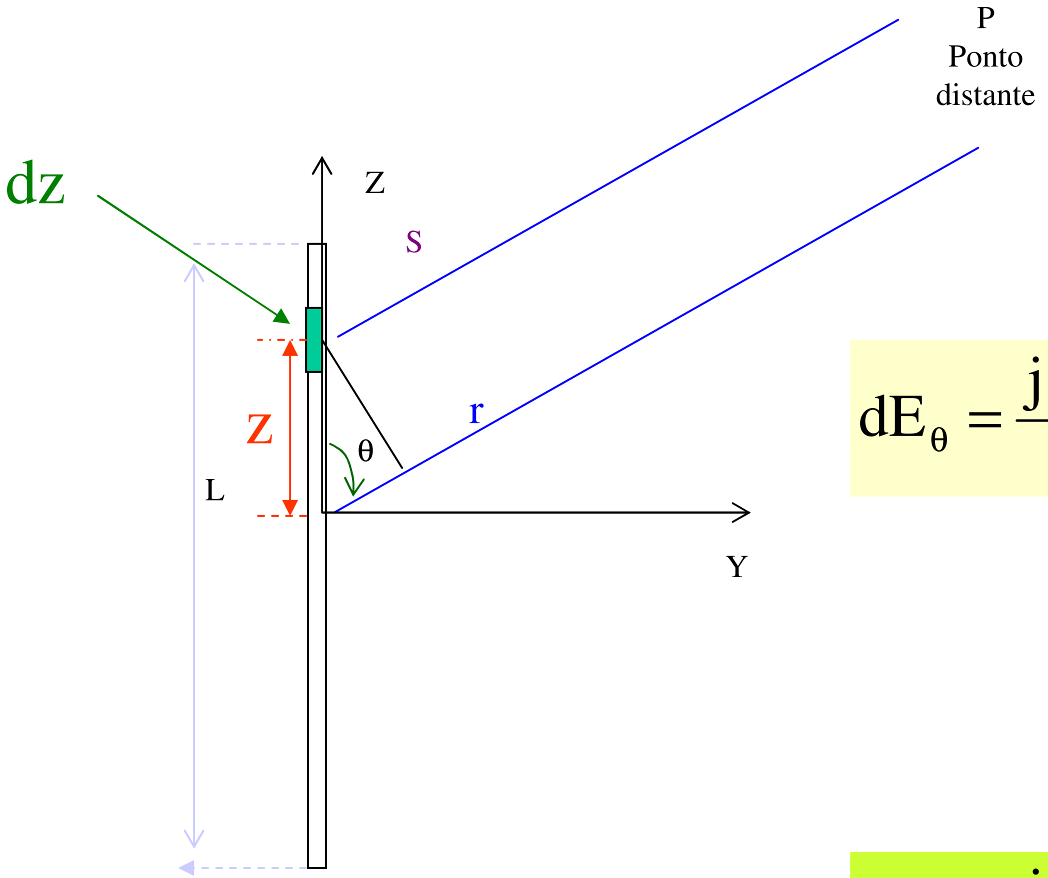
$$E_\theta = \frac{j \cdot 60 \cdot \pi \cdot I_0 \cdot e^{j\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)} \cdot L \operatorname{sen}\theta}{r \cdot \lambda} \Rightarrow \qquad E_\theta = \frac{j \cdot 60 \cdot \pi \cdot [I] \cdot L \operatorname{sen}\theta}{r \cdot \lambda}$$

Como o dipolo curto é um condutor de dimensões pequenas, sendo L orientado na direção z. O dipolo linear fino pode ser considerado uma soma de vários condutores pequenos, conseqüentemente o campo elétrico para dipolo linear fino é um somatório dos campos elétricos de vários dipolos curtos.

$$\underbrace{E_\theta}_{\Delta E_\theta} = \frac{j \cdot 60 \cdot \pi \cdot [I] \cdot \underbrace{L}_{\Delta z} \operatorname{sen} \theta}{r \cdot \lambda} \Rightarrow \Delta E_\theta = \frac{j \cdot 60 \cdot \pi \cdot [I] \cdot z \cdot \operatorname{sen} \theta}{r \cdot \lambda}$$

Se $z \Rightarrow 0$, então $\Delta E_\theta \Rightarrow dE_\theta$ e $z \Rightarrow dz$

$$dE_\theta = \frac{j \cdot 60 \cdot \pi \cdot [I] \cdot \operatorname{sen} \theta}{r \cdot \lambda} \cdot dz$$



$$dE_{\theta} = \frac{j \cdot 60 \cdot \pi \cdot [I] \cdot \operatorname{sen}\theta}{r \cdot \lambda} \cdot dz$$

s

$$\Downarrow$$

$$dE_{\theta} = \frac{j \cdot 60 \cdot \pi \cdot [I] \cdot \operatorname{sen}\theta}{s \cdot \lambda} \cdot dz$$

Utilizando as mesmas simplificações e raciocínios para o campo H teremos:

$$dH_{\phi} = \frac{j \cdot [I] \cdot \operatorname{sen}\theta}{2 \cdot s \cdot \lambda} \cdot dz$$

Como $\mathcal{E}_{\theta} = \mathcal{Z}.\mathcal{H}_{\Phi} = 120.\Pi\ .\mathcal{H}_{\Phi}$, basta acharmos o campo H_{Φ}.

Para acharmos o campo H_{Φ}, basta integrarmos de –L/2 a L/2

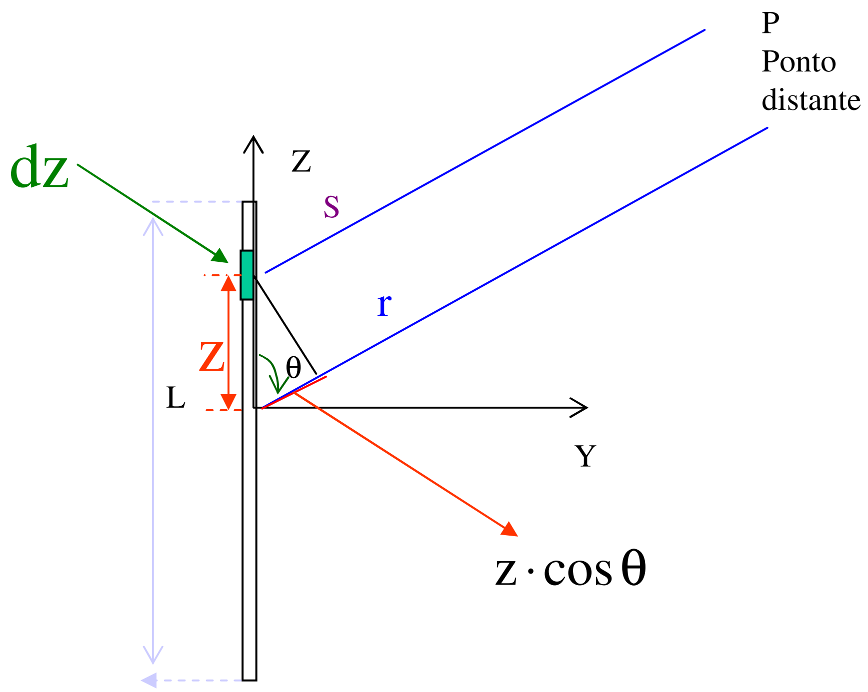
$$H_{\phi} = \int_{-L/2}^{L/2} dH_{\phi}$$

Sendo I, igual a:

$$I = I_0 \,\mathrm{sen}\left[\frac{2\cdot\pi}{\lambda}\left(\frac{L}{2} \pm z\right)\right]\cdot e^{j\omega\cdot\left(t-\frac{r}{c}\right)}$$

A integral fica:

$$H_\phi = \frac{j\cdot I_0 \cdot \mathrm{sen}\,\theta . e^{j\omega t}}{2\cdot\lambda}\cdot\left\{\int_{-L/2}^{0}\frac{1}{s}\mathrm{sen}\left[\frac{2\cdot\pi}{\lambda}\left(\frac{L}{2}+z\right)\right]\cdot e^{-j\cdot\frac{\omega\cdot s}{c}}\cdot dz + \int_{0}^{L/2}\frac{1}{s}\mathrm{sen}\left[\frac{2\cdot\pi}{\lambda}\left(\frac{L}{2}-z\right)\right]\cdot e^{-j\cdot\frac{\omega\cdot s}{c}}\cdot dz\right\}$$



A grandes distancias o s é praticamente igual a r sendo independente de z, para efeito da amplitude, conseqüentemente, saindo assim da integral. Porém para efeito da fase da onda, esse deva ser considerado como:

$$s = r - z \cdot \cos\theta$$

Desse modo a integral fica:

fase

$$H_\phi = \frac{j \cdot I_0 \cdot \operatorname{sen}\theta . e^{j\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)}}{2 \cdot \lambda \cdot r} \cdot \int_{-L/2}^{0} \operatorname{sen}\left[\frac{2 \cdot \pi}{\lambda}\left(\frac{L}{2} + z\right)\right] \cdot e^{j \cdot \frac{\omega \cdot \cos\theta}{c}} \cdot dz + \int_{0}^{L/2} \operatorname{sen}\left[\frac{2 \cdot \pi}{\lambda}\left(\frac{L}{2} - z\right)\right] \cdot e^{j \cdot \frac{\omega \cdot \cos\theta}{c}} \cdot dz$$

Para amplitude adota-se r=s e sai da integral por ser invariante com z.

fase

Adotando novamente β=ω/c , temos que β/4π = λ/2,
desse modo a integral fica:

$$H_\phi = \frac{j\cdot\beta\cdot I_0\cdot \mathrm{sen}\,\theta . e^{j\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)}}{4\cdot\pi\cdot r}\cdot\{\int_{-L/2}^{0}\mathrm{sen}\left[\frac{2\cdot\pi}{\lambda}\left(\frac{L}{2}+z\right)\right]\cdot e^{j\cdot\frac{\omega\cdot\cos\theta}{c}}\cdot dz + \int_{0}^{L/2}\mathrm{sen}\left[\frac{2\cdot\pi}{\lambda}\left(\frac{L}{2}-z\right)\right]\cdot e^{j\cdot\frac{\omega\cdot\cos\theta}{c}}\cdot dz\}$$

Fazendo a = jβcosθ; c= βL/2 e b=β para a 1º integral e b=-β para a 2º integral que estão dentro da chave ficam da forma:

$$\int e^{ax}\cdot\mathrm{sen}[c+bx]\cdot dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}\left[a\cdot\mathrm{sen}[c+bx]-b\cdot\cos[c+bx]\right]$$

Conseqüentemente teremos após todas as simplificações

$$H_\phi = \frac{j \cdot I_0 . e^{j\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)}}{2 \cdot \pi \cdot r} \cdot \frac{\cos((\beta L \cos\theta)/2) - \cos(\beta L/2)}{\operatorname{sen}\theta}$$

O campo elétrico então fica:

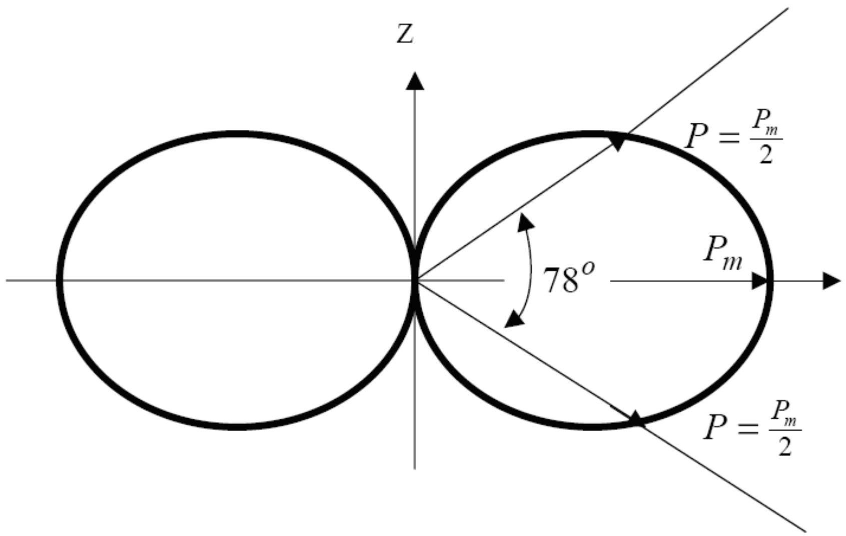
$$E_\theta = \frac{j \cdot 60 \cdot I_0 . e^{j\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)}}{r} \cdot \frac{\cos((\beta L \cos\theta)/2) - \cos(\beta L/2)}{\operatorname{sen}\theta}$$

Percebe-se que a diferença entre os valores de E e H é a parte fixa, pois a distribuição dos campos em relação a θ é idêntica.

Sendo assim os diagramas dos campos elétricos serão:

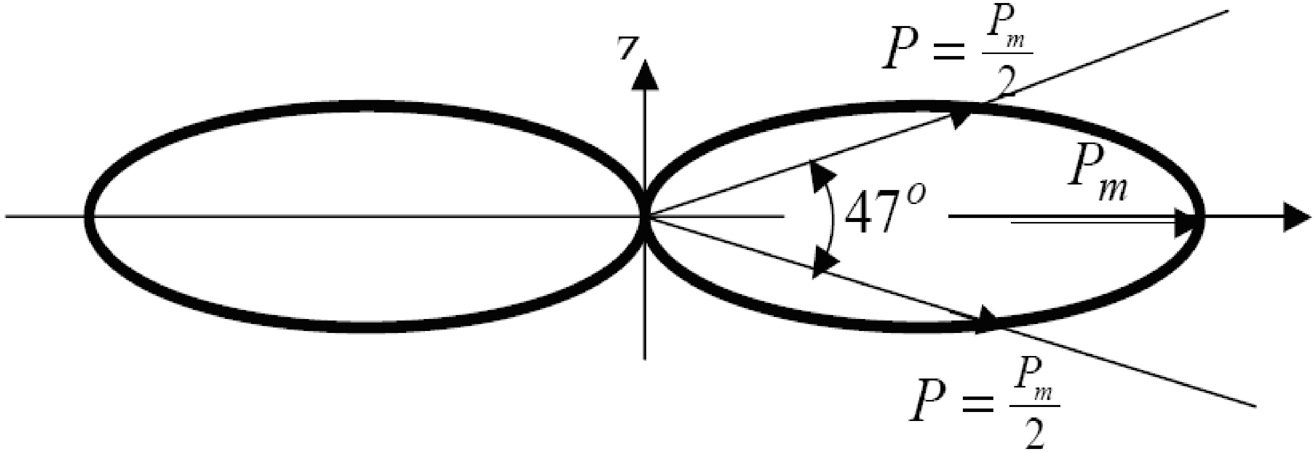
$$E = \frac{\left(\cos\left[\frac{\pi}{2}\cos\theta\right]\right)}{\operatorname{sen}\theta} \text{ para o dipolo com } L = \lambda/2$$

Padrão de radiação do diplo de meia onda



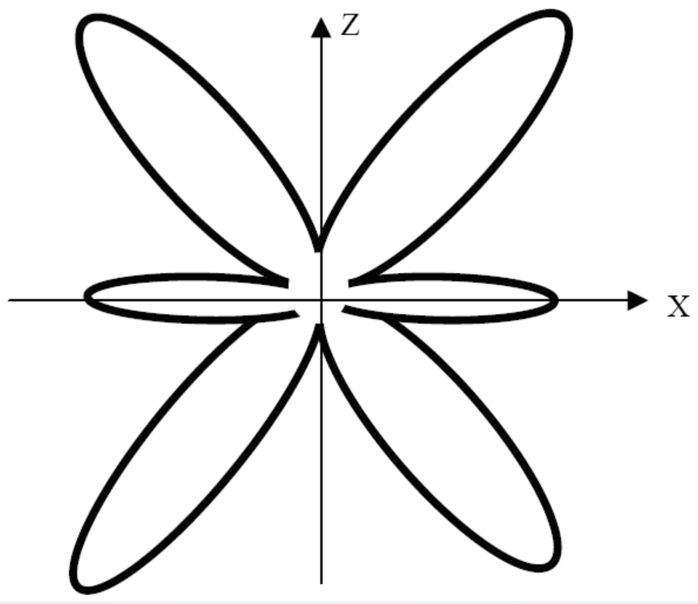
$$E = \frac{\cos(\pi \cos\theta + 1)}{\operatorname{sen}\theta} \text{ para o dipolo com } L = \lambda$$

Padrão de radiação de um Dipolo Simetrico de uma λ.



$$E = \frac{\left(\cos\left[\frac{3\pi}{2}\cos\theta\right]\right)}{\operatorname{sen}\theta} \text{ para o dipolo com } L = 3\lambda/2$$

Padrão do Dipolo de uma onda e meia



Para acharmos a resistência de radiação faremos :

$$P = \left(\frac{I_0}{\sqrt{2}}\right)^2 R_0 \text{, onde } R_0 \text{ é a resistencia}$$

de radiação no ponto de máxima corrente.

Sabendo que:

$$H_\phi = \frac{j \cdot I_0}{2 \cdot \pi \cdot r} \cdot \frac{\cos((\beta L \cos\theta)/2) - \cos(\beta L/2)}{\operatorname{sen}\theta}$$

$$P_R = \frac{1}{2} H_\phi{}^2 \cdot \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$$

$$W = \int P_R \cdot ds = \int H_\phi{}^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \cdot r^2 \cdot \operatorname{sen}\theta . d\theta . d\phi$$

$$W = \frac{15 I_0^{\;2}}{\pi} \cdot \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \left(\frac{\cos((\beta L \cos\theta)/2) - \cos(\beta L/2)}{\operatorname{sen}\theta} \right)^2 \operatorname{sen}\theta d\theta \cdot d\phi$$

$$W = \frac{15 I_0^{\;2}}{\pi} \cdot \int_0^{2\pi} d\phi \cdot \int_0^{\pi} \frac{(\cos((\beta L \cos\theta)/2) - \cos(\beta L/2))^2}{\operatorname{sen}\theta} d\theta$$

$$W = 30 I_0^{\;2} \int_0^{\pi} \frac{(\cos((\beta L \cos\theta)/2) - \cos(\beta L/2))^2}{\operatorname{sen}\theta} d\theta$$

$$\text{Sendo}: W = \frac{I_0^{\,2} \cdot R_0}{2}$$

$$\frac{\cancel{I_0^{\,2}} \cdot R_0}{2} = 30\cancel{I_0^{\,2}} \int_0^{\pi} \frac{\left(\cos\left(\left(\beta L \cos\theta\right)/2\right) - \cos\left(\beta L/2\right)\right)^2}{\operatorname{sen}\theta}\, d\theta$$

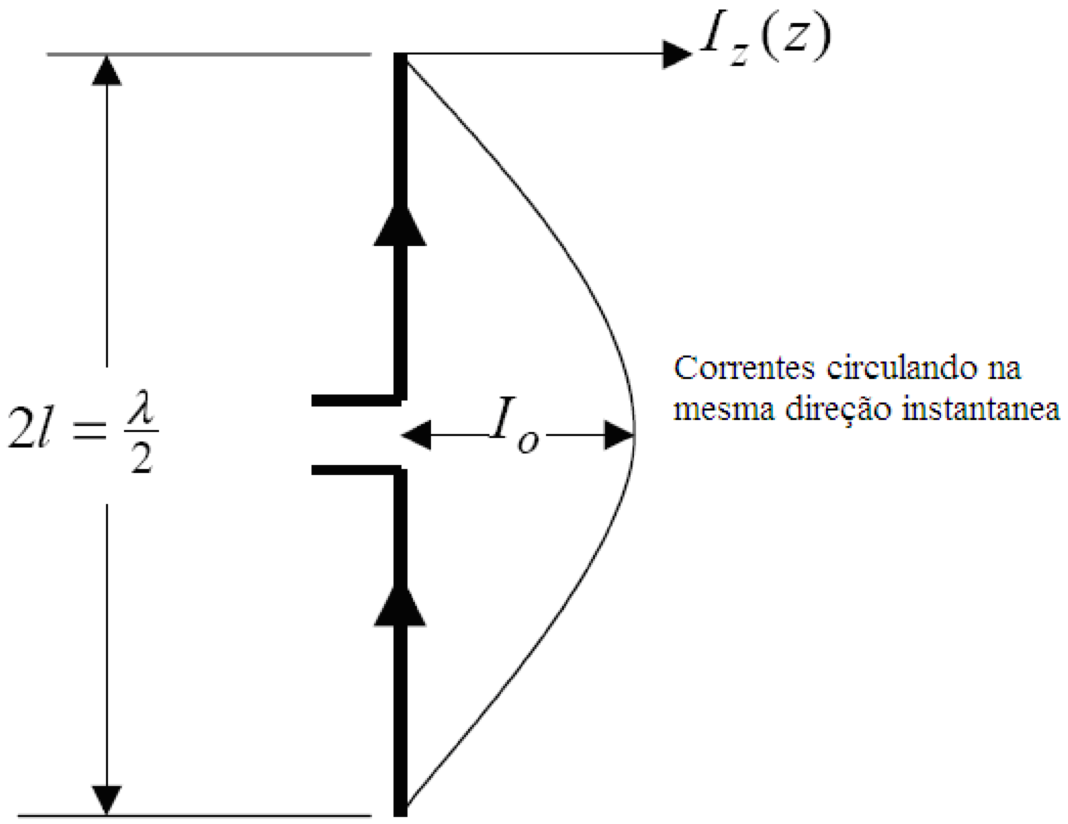
$$\boxed{R_0 = 60 \cdot \int_0^{\pi} \frac{\left(\cos\left(\left(\beta L \cos\theta\right)/2\right) - \cos\left(\beta L/2\right)\right)^2}{\operatorname{sen}\theta}\, d\theta}$$

Essa integral é feita numericamente.

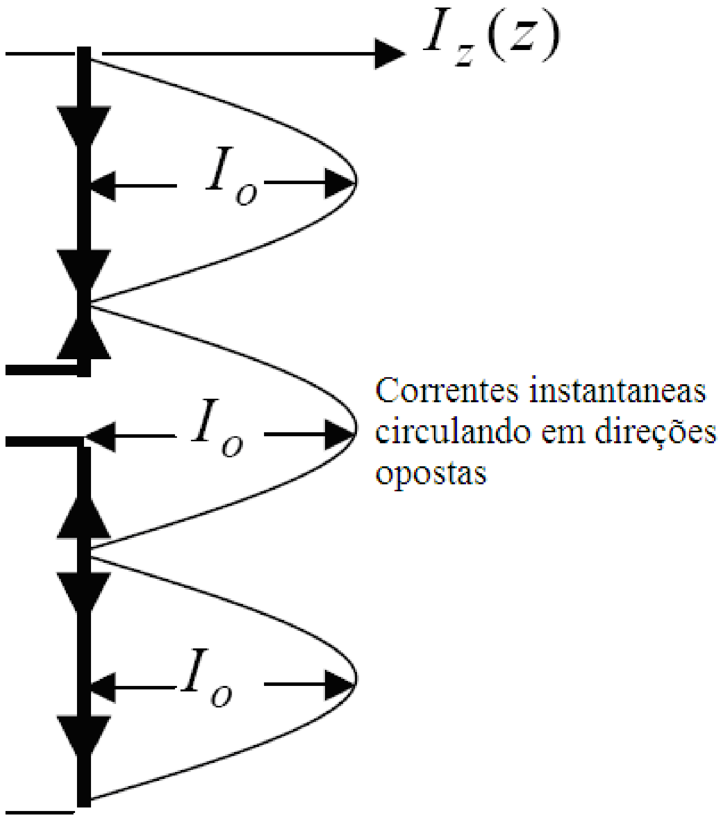
Como somente no dipolo de meia onda é que temos a corrente máxima nos terminais da linha de transmissão, precisamos determinar a resistência para outras correntes a fim de saber para cada tipo de dipolo qual a resistência que a linha de transmissão percebe.

Distribuição da corrente no Dipolo de meia onda

Distribuição de corrente do dipolo de meia onda



Distribuição de corrente Dipolo uma onda e meia.



ribuição de corrente do Diplo de 1.5λ.

Utilizando a equação da potência temos:

$$\text{Sendo}: W = \frac{I^2 \cdot R}{2} = \frac{I_0^{\ 2} \cdot R_0}{2} = \frac{I_1^{\ 2} \cdot R_1}{2}$$

Onde I_1 é a corrente em qualquer ponto onde a resistencia é R_1.

Logo:

$$\boxed{R_1 = \frac{I_0^{\ 2}}{I_1^{\ 2}} \cdot R_0}$$

Resistência de Radiação em Dipolos Lineares

Comprimento elétrico $\left(\frac{2l}{\lambda}\right)$	Resistência de Radiação em Ohm
0.25	6.4
0.30	13.0
0.40	36.0
0.50	73.2
0.60	120.0
0.70	168.0
0.80	200.0
0.90	212.0
1.00	199.0
1.10	166.0
1.20	127.0