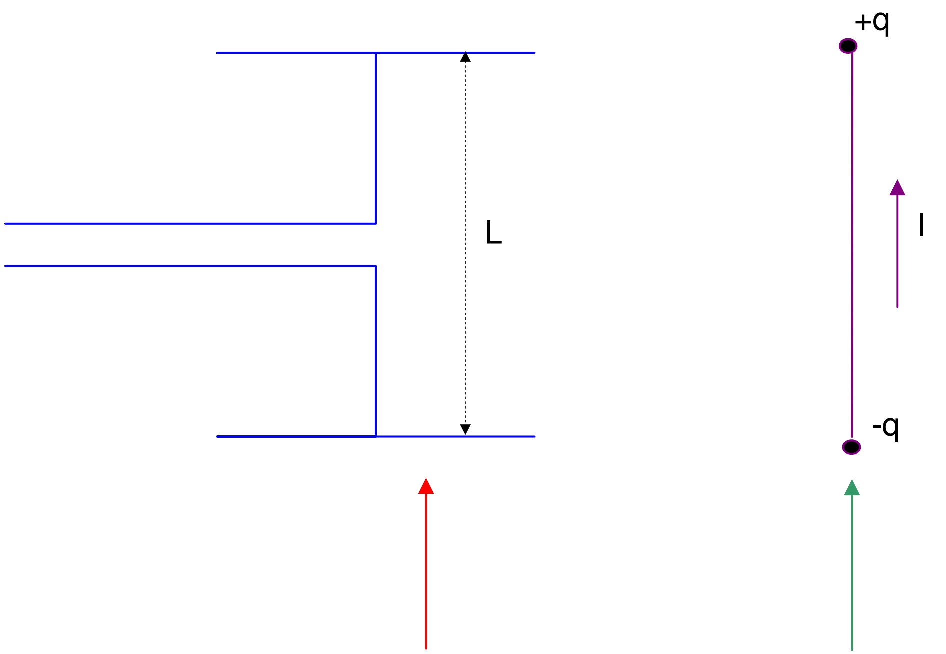
Dipolo Curto

Prof. Nilton Cesar de Oliveira Borges

Uma vez que se pode considerar que qualquer antena linear consiste de um grande número de condutores bem pequenos ligados em série, desse modo é importante analisar primeiramente as propriedades de radiação de condutores curtos.

Dipolo Curto



Dipolo Curto

Seu equivalente elétrico

- Utilizando o potencial vetorial A,

$$A = \frac{\mu}{4 \cdot \pi} \int \frac{J}{r} \cdot dv$$

Considerando que a secção do fio é de área constante temos:

Área da secção do fio

$$A = \frac{\mu}{4 \cdot \pi} \int \frac{J}{r} \cdot dv \Rightarrow \quad A = \frac{\mu}{4 \cdot \pi} \int \frac{J}{r} \cdot dx.dy.dz \Rightarrow$$

Corrente I

$$A = \frac{\mu}{4 \cdot \pi} \int \frac{dz}{r} \cdot \int J \cdot dx.dy \Rightarrow \quad A = \frac{\mu}{4 \cdot \pi} \int \frac{dz}{r} \cdot I$$

$$\boxed{A = \frac{\mu}{4 \cdot \pi} \int \frac{I}{r} \cdot dz}$$

- Como estamos interessados no campo distante. O sinal que chega no ponto P é de um sinal que foi gerado em um instante anterior, ou seja o sinal chega retardado em P.
- Esse retardo é igual a distancia do ponto P da origem dividido pela velocidade de propagação.
- Considerando a distancia do ponto P igual a r e velocidade da luz igual a "c" , temos que o tempo de retardo será de "r/c".

Desse modo o sinal que medimos em P no tempo t, foi gerado na verdade em um tempo anterior t’, sendo:

- $t' = t - r/c$

- ✓ t' é o tempo que ele foi gerado
- ✓ t igual ao tempo presente que recebemos o sinal
- ✓ r é a distancia da origem ao ponto P.
- ✓ c é a velocidade da luz

- Admitindo que a corrente obedeça a seguinte função:

$$I = I_0 \cdot e^{j\omega \cdot \left(t - \frac{r}{c}\right)}$$

Onde:

I é a corrente instantânea

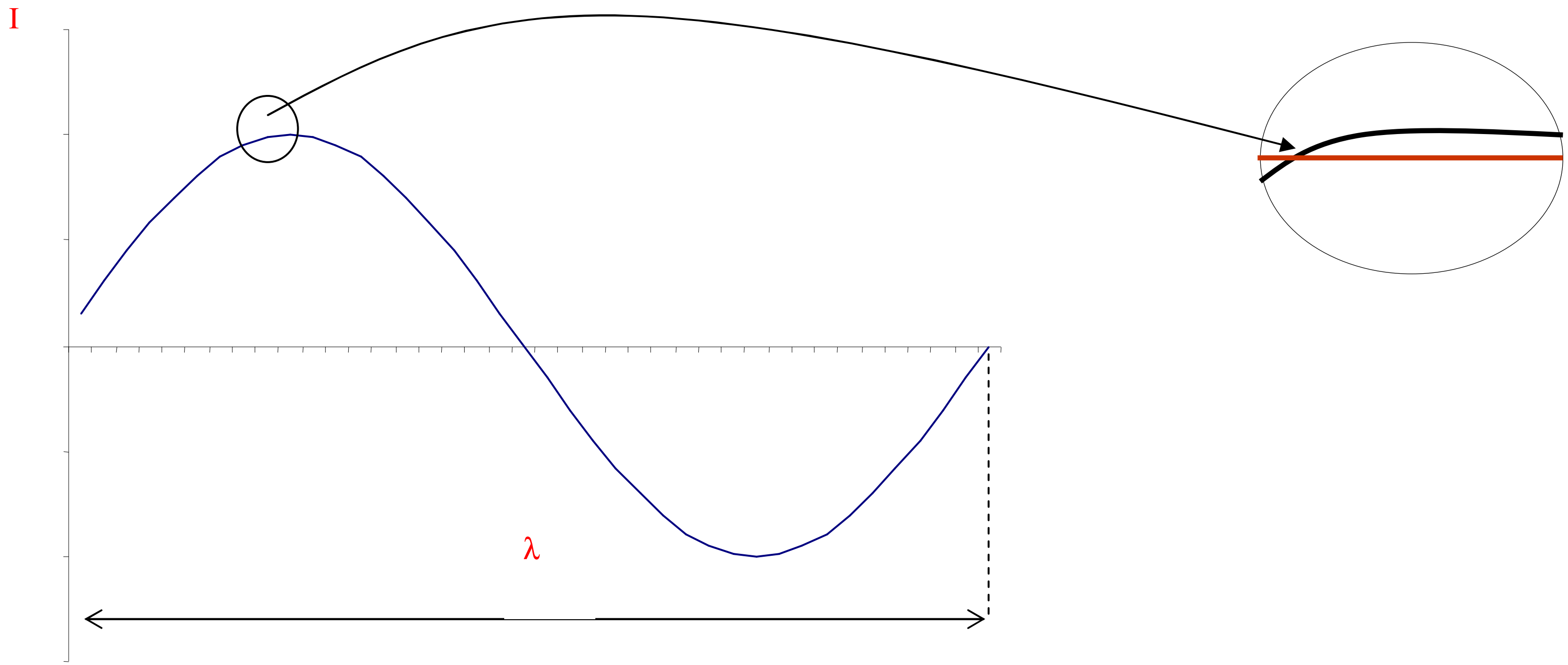
I_0 é a corrente máxima

ω= freqüência da onda

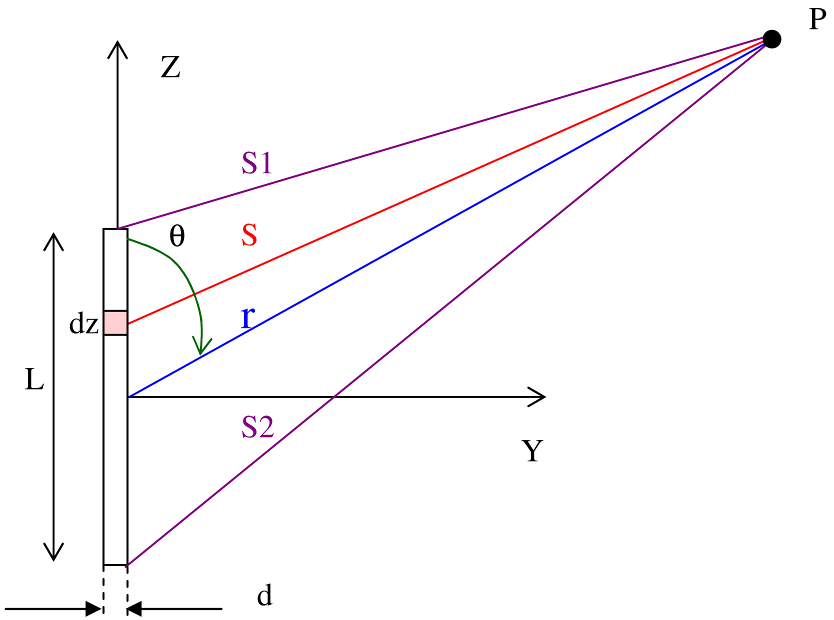
Em seguida faremos duas considerações para o calculo do campo que serão utilizados no cálculo do potêncial A

Primeira consideração

Considerando um dipolo onde (L<<λ), e que nos extremos existem duas placas que proporcionam um carregamento capacitivo, a corrente I, conseqüentemente é praticamente constante em todo o dipolo.



Segunda consideração



Se a distancia do ponto P for bem maior que o tamanho do dipolo L, pode-se considerar que **S=r constante para todo o dipolo**, sendo a diferença de fase entre os extremos do fio podem desprezadas.

Retomando a equação do pontencial A.

$$A = \frac{\mu}{4 \cdot \pi} \int \frac{I}{s} \cdot dz$$

1º consideração: I é cte em relação a z e sai da integral

$$A_z = \frac{\mu}{4 \cdot \pi} \int_{-L/2}^{L/2} \frac{I}{s} \cdot dz \Rightarrow A_z = \frac{I.\mu}{4 \cdot \pi \cdot r} \int_{-L/2}^{L/2} dz \Rightarrow \qquad A_z = \frac{I\mu L}{4 \cdot \pi \cdot r}$$

2º consideração: troca-se s por r que sai da integral por ser considerado aproximadamente constante em relação a z.

$$A_z = \frac{\mu L I}{4 \cdot \pi \cdot s} \Rightarrow$$

Substituindo I por:

$$I = I_0 \cdot e^{j\omega \cdot \left(t - \frac{r}{c}\right)}$$

Temos:

$$\boxed{A_z = \frac{\mu L I_0 e^{(t - r/c)}}{4 \cdot \pi \cdot r}}$$

O potencial escalar V é dado por:

$$V = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon} \int_{-L/2}^{L/2} \frac{[\rho]}{s} \cdot dv$$

dv = elemento volumétrica infinitesimal.
ε = constante volumétrica do espaço livre
ρ É a densidade volumétrica

ρ é também retardada por (t-r/c), sendo:

$$[\rho] = \rho_0 \cdot e^{j\omega\left(t - r/c\right)}$$

Devido ao efeito capacitivo as cargas do dipolo estarem confinadas aos extremos, temos o potencial dado por:

$$V = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon} \left[\frac{q}{s1} - \frac{q}{s2} \right]$$

Vamos agora encontrar o valor de q em função de I:

$$I = \frac{dq}{dt} \quad \Rightarrow \quad [q] = \int I \cdot dt$$

se

$$I = I_0 \cdot e^{j\omega\left(t - r/c\right)}$$

Então

$$[q] = \int I \cdot dt \qquad \Rightarrow \qquad [q] = I_0 \int \cdot e^{j\omega\left(t - r/c\right)} dt$$

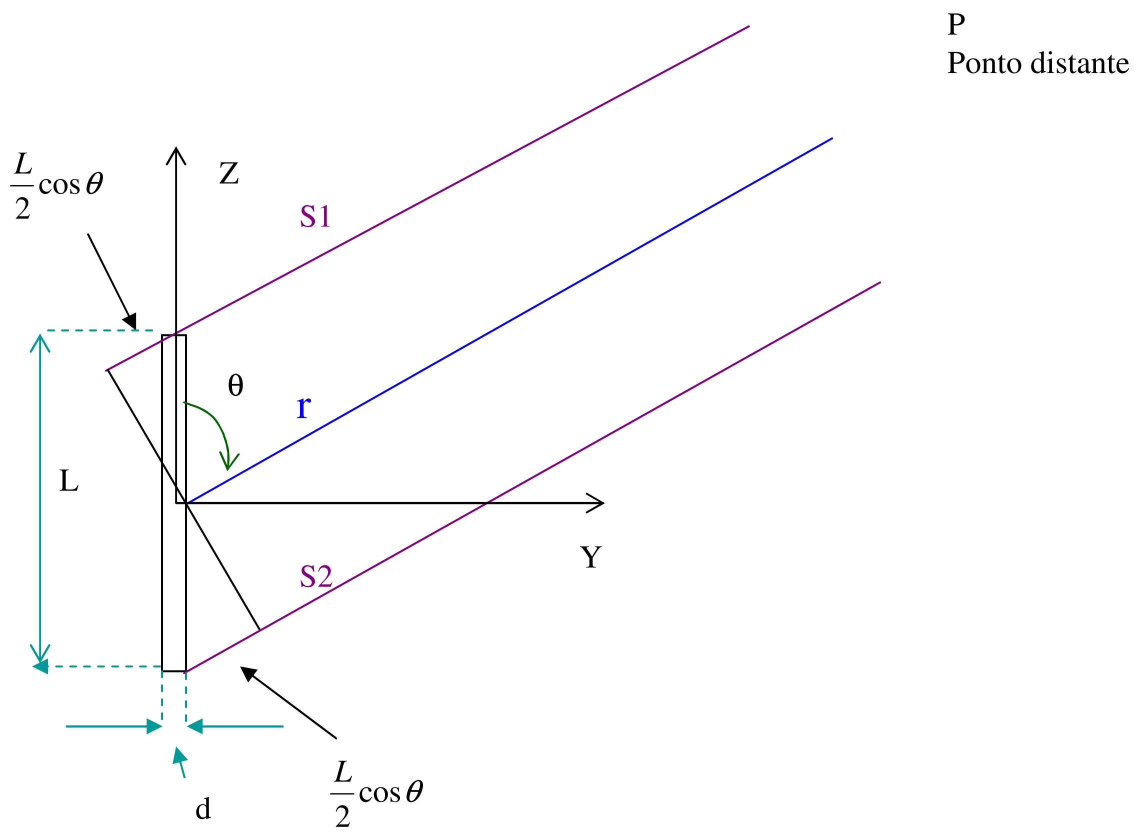
Integrando, temos:

$$\boxed{[q] = \frac{I_0}{j\omega} e^{j\omega\left(t - r/c\right)}}$$

Substituindo o valor de q na equação
do potencial temos:

$$V = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon} \left[\frac{q}{s1} - \frac{q}{s2} \right] \Rightarrow$$

$$V = \frac{I_0}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon \cdot j\omega} \left[\frac{e^{j\omega\left(t - \frac{S_1}{c}\right)}}{S_1} - \frac{e^{j\omega\left(t - \frac{S_2}{c}\right)}}{S_2} \right]$$



Observando a figura acima e sabendo que a distancia do ponto P é muito maior que L do dipolo temos:

$$S_1 = r - \frac{L}{2}\cos\theta \text{ e } S_2 = r + \frac{L}{2}\cos\theta$$

Podemos então reescrever a função potencial como:

$$V = \frac{I_0}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon \cdot j\omega} \left[\frac{e^{j\omega\left(t - \frac{r - \frac{L}{2}\cos\theta}{c}\right)}}{r - \frac{L}{2}\cos\theta} - \frac{e^{j\omega\left(t - \frac{r + \frac{L}{2}\cos\theta}{c}\right)}}{r + \frac{L}{2}\cos\theta} \right]$$

Tirando o mínimo temos:

$$V = \frac{I_0}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon \cdot j\omega} \left[\frac{e^{j\omega\left(t - \frac{r - \frac{L}{2}\cos\theta}{c}\right)} \cdot \left(r + \frac{L}{2}\cos\theta\right) - e^{j\omega\left(t - \frac{r + \frac{L}{2}\cos\theta}{c}\right)} \cdot \left(r - \frac{L}{2}\cos\theta\right)}{r^2 - \left(\frac{L}{2}\cos\theta\right)^2} \right]$$

Como r>>L , podemos apenas considerar o termo r^2 no denominador, reduzindo a expressão em:

$$V = \frac{I_0}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon \cdot j\omega} \left[\frac{e^{j\omega\left(t - \frac{r - \frac{L}{2}\cos\theta_1}{c}\right)} \cdot \left(r + \frac{L}{2}\cos\theta\right) - e^{j\omega\left(t - \frac{r + \frac{L}{2}\cos\theta_1}{c}\right)} \cdot \left(r - \frac{L}{2}\cos\theta\right)}{r^2} \right]$$

$$V = \frac{I_0}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon \cdot j\omega} \left[\frac{e^{j\omega\left(t - \frac{r - \frac{L}{2}\cos\theta_1}{c}\right)} \cdot \left(r + \frac{L}{2}\cos\theta\right) - e^{j\omega\left(t - \frac{r + \frac{L}{2}\cos\theta_1}{c}\right)} \cdot \left(r - \frac{L}{2}\cos\theta\right)}{r^2} \right]$$

Sabendo que:

$$e^{j\omega\left(t - \frac{r - \frac{L}{2}\cos\theta_1}{c}\right)} \Rightarrow e^{j\omega\left[t - \left(\frac{r}{c} - \frac{L}{2c}\cos\theta\right)\right]} \Rightarrow \cdot e^{j\omega\left[\left(t - \frac{r}{c}\right) + \left(\frac{L}{2c}\cos\theta\right)\right]}$$

$$e^{j\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\cdot} e^{j\omega\left(\frac{L}{2c}\cos\theta\right)\cdot}$$

O numerador da expressão entre parênteses do potencial ficará:

$$e^{j\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\cdot} e^{j\omega\left(\frac{L}{2c}\cos\theta\right)\cdot} \left(r + \frac{L}{2}\cos\theta\right) - e^{-j\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\cdot} e^{j\omega\left(\frac{L}{2c}\cos\theta\right)\cdot} \cdot \left(r - \frac{L}{2}\cos\theta\right)$$

A expressão do potencial ficará:

$$V = \frac{I_0 e^{j\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)}}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon \cdot j\omega} \left[\frac{e^{j\omega\left(\frac{L}{2c}\cos\theta\right)} \cdot \left(r + \frac{L}{2}\cos\theta\right) - e^{-j\omega\left(\frac{L}{2c}\cos\theta\right)} \cdot \left(r - \frac{L}{2}\cos\theta\right)}{r^2} \right]$$

Utilizando a identidade de Euler: $e^{j\varphi} = \cos(\varphi) + j \cdot \operatorname{sen}\varphi$

A expressão do potencial pode ser escrita como:

$$\boxed{V = \frac{I_0 e^{j\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)}}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon \cdot j\omega \cdot r^2} \left[\left(\cos\frac{\omega L \cos\theta}{2c} + j\operatorname{sen}\frac{\omega L \cos\theta}{2c} \right) \cdot \left(r + \frac{L}{2}\cos\theta \right) - \left(\cos\frac{\omega L \cos\theta}{2c} - j\operatorname{sen}\frac{\omega L \cos\theta}{2c} \right) \cdot \left(r - \frac{L}{2}\cos\theta \right) \right]}$$

$$\omega = 2 \cdot \pi \cdot f \text{ e } f = \frac{c}{\lambda}$$

$$\frac{\omega}{2 \cdot c} \Rightarrow \frac{2 \cdot \pi \cdot \boxed{f}}{2 \cdot c} \Rightarrow \frac{2 \cdot \pi \cdot \boxed{c}}{2 \cdot c \cdot \boxed{\lambda}} \Rightarrow \frac{\pi}{\lambda}$$

Utilizando a relação acima temos:

$$\cos \frac{\omega L \cos \theta}{2c} = \cos \frac{\pi L \cos \theta}{\lambda} \quad \text{e} \quad \text{sen} \frac{\omega L \cos \theta}{2c} = \text{sen} \frac{\pi L \cos \theta}{\lambda}$$

Como λ>>L então:

$$\cos \frac{\pi L \cos \theta}{\lambda} \cong 1 \qquad \text{sen} \frac{\pi L \cos \theta}{\lambda} \cong \frac{\pi L \cos \theta}{\lambda}$$

$$\cos\frac{\pi L\cos\theta}{\lambda}\cong 1 \qquad\qquad sen\,\frac{\pi L\cos\theta}{\lambda}\cong\frac{\pi L\cos\theta}{\lambda}$$

Utilizando as relações acima na formula de potencial teremos:

$$\boxed{V=\frac{I_0 e^{j\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)}}{4\cdot\pi\cdot\varepsilon\cdot j\omega\cdot r^2}\left[\left(\cos\frac{\omega L\cos\theta}{2c}+j\,\mathrm{sen}\,\frac{\omega L\cos\theta}{2c}\right)\cdot\left(r+\frac{L}{2}\cos\theta\right)-\left(\cos\frac{\omega L\cos\theta}{2c}-j\,\mathrm{sen}\,\frac{\omega L\cos\theta}{2c}\right)\cdot\left(r-\frac{L}{2}\cos\theta\right)\right]}$$

$$V=\frac{I_0 e^{j\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)}}{4\cdot\pi\cdot\varepsilon\cdot j\omega\cdot r^2}\left[\left(1+j\frac{\omega L\cos\theta}{2c}\right)\cdot\left(r+\frac{L}{2}\cos\theta\right)-\left(1-j\frac{\omega L\cos\theta}{2c}\right)\cdot\left(r-\frac{L}{2}\cos\theta\right)\right]$$

$$V=\frac{I_0 e^{j\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)}}{4\cdot\pi\cdot\varepsilon\cdot j\omega\cdot r^2}\left[\left(1+j\frac{\omega L\cos\theta}{2c}\right)\cdot\left(r+\frac{L}{2}\cos\theta\right)-\left(1-j\frac{\omega L\cos\theta}{2c}\right)\cdot\left(r-\frac{L}{2}\cos\theta\right)\right]$$

Para simplificarmos a expressão acima chamaremos de:

$$a=1;\mathrm{b}=j\frac{\omega L\cos\theta}{2c};c=r;d=\frac{L}{2}\cos\theta$$

A expressão dentro dos colchetes se tornam:

$$(a+b)\cdot(c+d)-(a-b)\cdot(c-d)\Rightarrow$$

$$ac+ad+bc+bd-ac+ad+bc-bd\Rightarrow\;2ad+2bc$$

A expressão dentro do colchetes pode ser escrita como:

$$\left[\left(2\cdot\frac{L}{2}\cos\theta+2\cdot r\cdot j\frac{\omega L\cos\theta}{2c}\right)\right]$$

$$V = \frac{I_0 e^{j\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)}}{4\cdot\pi\cdot\varepsilon\cdot j\omega\cdot r^2}\left[\left(2\cdot\frac{L}{2}\cos\theta + 2\cdot r\cdot j\frac{\omega L\cos\theta}{2c}\right)\right]$$

Colocando L.cosθ em evidência a expressão fica como:

$$V = \frac{I_0 e^{j\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)}}{4\cdot\pi\cdot\varepsilon\cdot j\omega\cdot r^2}\cdot L\cos\theta\left[\left(1 + r\cdot j\frac{\omega}{c}\right)\right]$$

Passando $1/j\omega r^2$ para dentro do parênteses e multiplicando por c/c resulta em:

$$V = \frac{I_0\cdot L\cos\theta\cdot e^{j\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)}}{4\cdot\pi\cdot\varepsilon\cdot c}\left[\left(\frac{c}{j\omega r^2} + \frac{1}{r}\right)\right]$$

Temos agora então o potencial escalar V e o potencial vetorial A em função de I.

$$V = \frac{I_0 \cdot L\cos\theta \cdot e^{j\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)}}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon \cdot c}\left[\left(\frac{c}{j\omega r^2}+\frac{1}{r}\right)\right]$$

$$A_z = \frac{\mu L I_0 e^{(t-r/c)}}{4 \cdot \pi \cdot r}$$

Agora temos que calcular os campos E e H.

As relações entre os potenciais escalares e vetoriais com as equação de Maxell são:

$$\vec{E} = -j\omega A - \nabla V$$

$$\overrightarrow{H} = \frac{1}{\mu} \nabla \times A$$

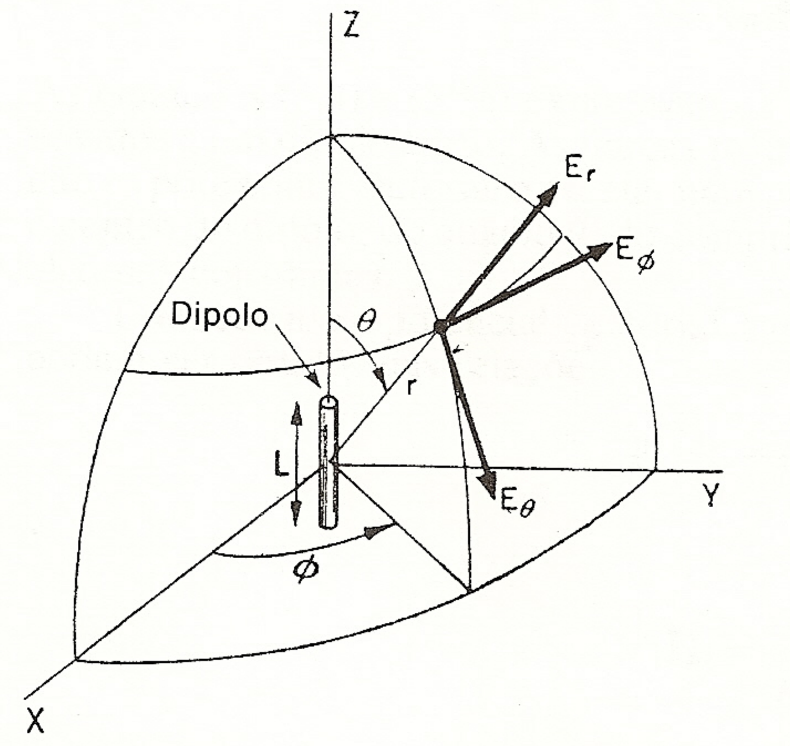


Fig. 5.2 Relação do dipolo às coordenadas.

O Campo Elétrico em coordenadas polares é dado por :

$$E = E_r \cdot a_r + E_\theta \cdot a_\theta + E_\phi \cdot a_\phi$$

O divergente em coordenadas polares do potencial escalar é dado por:

$$\forall V = \frac{\partial V}{\partial r} a_r + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} a_\theta + \frac{1}{r \operatorname{sen} \theta} \frac{\partial V}{\partial \phi} a_\phi$$

O potencial vetor A em coordenadas polares é dado por:

$$A = A_r a_r + A_\theta a_\theta + A_\phi a_\phi$$

Desse modo as componentes do campo elétrico utilizando a relação $\vec{E} = -j\omega A - \forall V$ ficam:

$$E_r = -j\omega A_r - \frac{\partial V}{\partial r} \qquad E_\theta = -j\omega A_\theta - \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta}$$

$$E_\phi = -j\omega A_\phi + \frac{1}{r \operatorname{sen} \theta} \frac{\partial V}{\partial \phi} a_\phi$$

$$E_r = -j\omega A_r - \frac{\partial V}{\partial r} \qquad E_\theta = -j\omega A_\theta - \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}$$

$$E_\phi = -j\omega A_\phi + \frac{1}{r\,\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial V}{\partial \phi}a_\phi$$

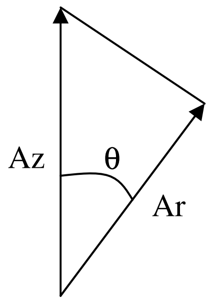
Na expressão do potencial escalar, é visto que este não tem dependência de Φ, logo $\delta V/\delta\Phi=0$, sendo $A_{\Phi,}$ também igual a 0 logo $E_\Phi=0$.

Tendo o vetor A em coordenadas polares sendo:

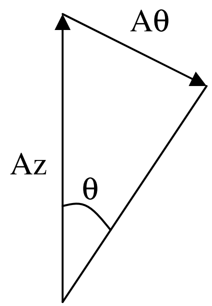
$$A = A_r a_r + A_\theta a_\theta + A_\phi a_\phi$$

È sabido que A só tem componente em Z logo A_Φ=0 e as outras componente são dadas por:

$$A_r = A_z \cos\theta$$



$$A_\theta = -A_z \operatorname{sen}\theta$$



$$E_r = -j\omega A_r - \frac{\partial V}{\partial r} \qquad E_\theta = -j\omega A_\theta - \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}$$

Substituindo: $A_r = A_z \cos\theta$ e $A_\theta = -A_z \operatorname{sen}\theta$

nas expressões acima temos:

$$E_r = -j\omega A_z \cos\theta - \frac{\partial V}{\partial r}$$

$$E_\theta = -j\omega A_z \operatorname{sen}\theta - \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}$$

Expressões dos campos E no dipolo curto

$$E_r = \frac{I_0 \cdot L\cos\theta \cdot e^{j\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)}}{2\cdot\pi\cdot\varepsilon}\left[\left(\frac{1}{cr^2}+\frac{1}{\cdot j\omega r^3}\right)\right]$$

$$E_\theta = \frac{I_0 \cdot L\,\mathrm{sen}\,\theta \cdot e^{j\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)}}{4\cdot\pi\cdot\varepsilon}\left[\left(\frac{j\omega}{c^2 r}+\frac{1}{cr^2}+\frac{1}{j\omega r^3}\right)\right]$$

Analisando o campo magnético temos:

Rotacional do potencial A em coordenadas esféricas

$$\nabla\times A = a_r\frac{1}{r\cdot \operatorname{sen}\theta}\cdot\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\left(A_\phi \operatorname{sen}\theta\right)-\frac{\partial\left(A_\theta\right)}{\partial\phi}\right)+a_\theta\frac{1}{r}\cdot\left(\frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\cdot\frac{\partial A_r}{\partial\phi}-\frac{\partial}{\partial\theta}\left(r\cdot A_\phi\right)\right)+a_\phi\frac{1}{r}\cdot\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\left(r\cdot A_\theta\right)-\frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right)$$

Multiplicando "a_r" por "r" em cima e em baixo e colocando alguns termos em evidência nos outros vetores temos:

$$\nabla\times A = a_r\frac{1}{r^2\cdot \operatorname{sen}\theta}\cdot\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\left(r\cdot A_\phi \operatorname{sen}\theta\right)-\frac{\partial\left(r\cdot A_\theta\right)}{\partial\phi}\right)+a_\theta\frac{1}{r\cdot\operatorname{sen}\theta}\cdot\left(\frac{\partial A_r}{\partial\phi}-\frac{\partial}{\partial\theta}\left(r\cdot\operatorname{sen}\theta\cdot A_\phi\right)\right)+a_\phi\frac{1}{r}\cdot\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\left(r\cdot A_\theta\right)-\frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right)$$

0

$$\nabla \times A = a_r \frac{1}{r^2 \cdot \operatorname{sen}\theta} \cdot \left(\frac{\partial}{\partial \theta}\left(r \cdot A_\phi \operatorname{sen}\theta\right) - \frac{\partial\left(r \cdot A_\theta\right)}{\partial \phi} \right) + a_\theta \frac{1}{r \cdot \operatorname{sen}\theta} \cdot \left(\frac{\partial A_r}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial \theta}\left(r \cdot \operatorname{sen}\theta \cdot A_\phi\right) \right) + a_\phi \frac{1}{r} \cdot \left(\frac{\partial}{\partial \theta}\left(r \cdot A_\theta\right) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right)$$

Sendo A_Φ=0 o primeiro e quarto temos são 0.

$$\nabla \times A = a_r \frac{1}{r^2 \cdot \operatorname{sen}\theta} \cdot \left(- \frac{\partial\left(r \cdot A_\theta\right)}{\partial \phi} \right) + a_\theta \frac{1}{r \cdot \operatorname{sen}\theta} \cdot \left(\frac{\partial A_r}{\partial \phi} \right) + a_\phi \frac{1}{r} \cdot \left(\frac{\partial}{\partial \theta}\left(r \cdot A_\theta\right) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right)$$

É sabido que: $A_r = A_z \cos\theta \quad ; \quad A_\theta = -A_z \operatorname{sen}\theta$

Conseqüentemente Ar e AΘ não dependem de Φ, logo o 1º e 3º termo também são zero, logo a equação se torna:

$$\nabla \times A = a_\phi \frac{1}{r} \cdot \left(\frac{\partial}{\partial \theta}\left(r \cdot A_\theta\right) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right)$$

$$\nabla \times A = a_\phi \frac{1}{r} \cdot \left(\frac{\partial}{\partial \theta}(r \cdot A_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right)$$

Tendo que:

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu} \nabla \times A = \frac{1}{\mu \cdot r} \cdot \left(\frac{\partial}{\partial \theta}(r \cdot A_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) a_\phi$$

Fazendo as operações e as devidas simplificações temos que o módulo de H é:

$$H_\phi = \frac{I_0 \cdot L \operatorname{sen} \theta \cdot e^{j\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)}}{4 \cdot \pi} \left[\frac{j\omega}{cr} + \frac{1}{r^2} \right]$$

Para o campo distante, no caso do campo Elétrico as componentes $1/r^2$ e $1/r^3$ se tornam desprezíveis, e no caso campo Magnético a componente $1/r^2$ também se torna desprezível, restando então:

$$E_\theta = \frac{I_0 \cdot L \operatorname{sen}\theta \cdot e^{j\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)}}{4\cdot\pi\cdot\varepsilon}\left[\frac{j\omega}{c^2 r}\right]$$

$$H_\phi = \frac{I_0 \cdot L \operatorname{sen}\theta \cdot e^{j\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)}}{4\cdot\pi}\left[\frac{j\omega}{cr}\right]$$

Desse modo para o campo distante teremos:

$$E_\theta = \frac{j\cdot\omega\cdot I_0 \cdot L \operatorname{sen}\theta \cdot e^{j\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)}}{4\cdot\pi\cdot\varepsilon\cdot c^2 r}$$

$$H_\phi = \frac{j\cdot\omega\cdot I_0 \cdot L \operatorname{sen}\theta \cdot e^{j\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)}}{4\cdot\pi\cdot c\cdot r}$$

A impedância do espaço livre é dado pela relação:

$$\frac{E_\theta}{H_\phi} = \frac{\dfrac{j \cdot \omega \cdot I_0 \cdot L \operatorname{sen} \theta \cdot e^{j\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)}}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon \cdot c^2 r}}{\dfrac{j \cdot \omega \cdot I_0 \cdot L \operatorname{sen} \theta \cdot e^{j\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)}}{4 \cdot \pi \cdot c \cdot r}} \Rightarrow$$

$$\frac{E_\theta}{H_\phi} = \frac{1}{\varepsilon \cdot c} \Rightarrow$$

$$\frac{E_\theta}{H_\phi} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = 377\Omega \text{ ou } 120\pi\Omega$$

O vetor de Poyinting médio é dado por:

$$P = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(E \times H^{*}\right) \Rightarrow \qquad P_r = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(E_\theta . H_\phi^{*}\right)$$

Na equação anterior do campo distante temos:

$$\frac{E_\theta}{H_\phi} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \Rightarrow \qquad E_\theta = H_\phi \cdot \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$$

Desse modo:

$$P_r = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(E_\theta . H_\phi^{*}\right) \Rightarrow \quad P_r = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(H_\phi \cdot \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} . H_\phi^{*}\right) \Rightarrow$$

$$P_R = \frac{1}{2} H_\phi^{2} \cdot \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \Rightarrow \qquad P_R = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \cdot \frac{\omega^2 \cdot I_0^{2} \cdot L^2 \,\mathrm{sen}^2\,\theta \cdot e^{2 \cdot j\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)}}{4^2 \cdot \pi^2 \cdot c^2 \cdot r^2}$$

$$P_R = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\cdot\frac{\omega^2\cdot I_0{}^2\cdot L^2\,\text{sen}^2\,\theta\cdot e^{2\cdot j\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)}}{4^2\cdot\pi^2\cdot c^2\cdot r^2}$$

Chamando: $\beta = \dfrac{\omega\cdot e^{\cdot j\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)}}{c}$

Temos: $P_R = \dfrac{1}{32}\cdot\sqrt{\dfrac{\mu}{\varepsilon}}\cdot\dfrac{\beta^2\cdot I_0{}^2\cdot L^2\,\text{sen}^2\,\theta}{\pi^2\cdot r^2} \Rightarrow$

Se a pontência W é: $W = \int P_R\cdot ds = \int H_\phi{}^2\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\sqrt{\dfrac{\mu}{\varepsilon}}\cdot r^2\cdot\text{sen}\,\theta.d\theta.d\phi \Rightarrow$

$$W = \frac{1}{32}\cdot\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\cdot\frac{\beta^2\cdot I_0{}^2\cdot L^2}{\pi^2}\cdot\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\text{sen}^3\theta\cdot d\theta\cdot d\phi \Rightarrow$$

$$W = \frac{1}{32}\cdot\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\cdot\frac{\beta^2\cdot I_0{}^2\cdot L^2}{\pi^2}\cdot\frac{8\cdot\pi}{3} \Rightarrow$$

$$W = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\cdot\frac{\beta^2\cdot I_0{}^2\cdot L^2}{12\cdot\pi}$$

$$W = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \cdot \frac{\beta^2 \cdot {I_0}^2 \cdot L^2}{12 \cdot \pi}$$

É sabido que a potência é dada por: $W = I^2 \cdot R$

Sendo “I” igual a corrente eficaz

Se a potência W é a potencia média gerada através de uma esfera que envolve o dipolo, e se as ´perdas são nulas ,então, R é a Resistência de Radiação, logo:

$$\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \cdot \frac{\beta^2 \cdot {I_0}^2 \cdot L^2}{12 \cdot \pi} = \left(\frac{I_0}{\sqrt{2}}\right)^2 R \Rightarrow$$

$$\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \cdot \frac{\beta^2 \cdot L^2}{6 \cdot \pi} = R \Rightarrow$$

$$\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \cdot \frac{\beta^2 \cdot L^2}{6 \cdot \pi} = R \Rightarrow$$

$$\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \cdot \frac{\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \cdot L^2}{6 \cdot \pi} = R \Rightarrow$$

$$\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \cdot \frac{\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot \cancel{f}}{\lambda \cdot \cancel{f}}\right)^2 \cdot L^2}{6 \cdot \pi} = R \Rightarrow$$

$$\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \cdot \frac{\frac{4 \cdot \pi^2}{\lambda} \cdot L^2}{6 \cdot \pi} = R \Rightarrow$$

$$\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \cdot \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot L^2}{\lambda \cdot 6 \cdot \pi} = R \Rightarrow$$

Se: $\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = 120\pi\Omega \Rightarrow$

$$120\pi \cdot \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot L^2}{\lambda \cdot 6 \cdot \pi} = R \Rightarrow$$

$$80 \cdot \pi^2 \left(\frac{L}{\lambda}\right)^2 = R$$