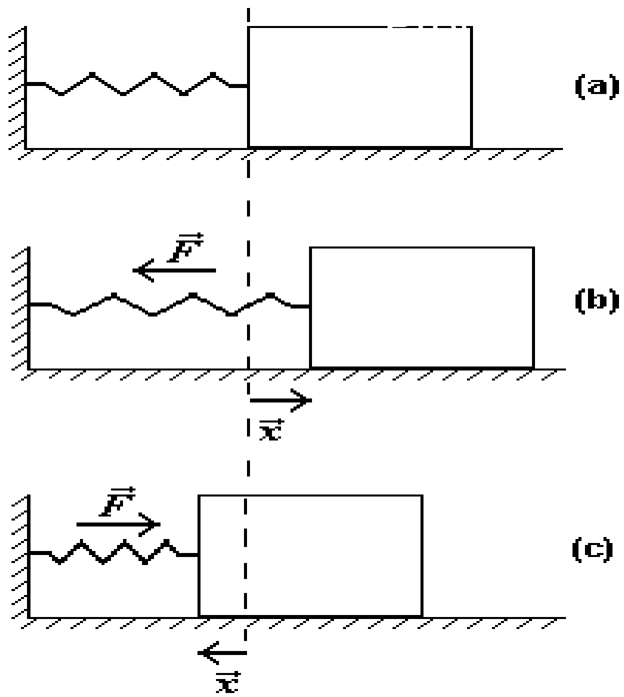
Equação diferencial de Euler

Prof. Nilton Cesar de Oliveira Borges

Equação de Euler

A equação de Euler aparece por exemplo em um sistema massa-mola



$$F = -Kx$$

$$ma = -Kx$$

$$a = \frac{-Kx}{m}$$

$$a = -\frac{K}{m}x$$

A aceleração é a segunda derivada do espaço pelo tempo, sendo assim a equação fica na forma:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{K}{m}x$$

Para resolver essa equação é preciso achar a função que:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{K}{m}x \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{K}{m}x = 0$$

resulte em 0

somada

Com ela mesma vezes uma constante

derivada duas vezes em relação a tempo

Que função é essa ?

A função que Euler tirou do bolso foi:

$$X = C1 * \mathrm{sen}(\omega t) + C2 * \cos(\omega t)$$

Onde C1 e C2 são encontradas dependendo das condições de contorno

Abaixo, o teste da função:

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{K}{m}x=0$$

$$\frac{d(C1.sen(\omega t))}{dt}=-C1.\cos(\omega t).\omega$$ ← 1º derivada do seno

$$\frac{d(-C1.\cos(\omega t))}{dt}=-C1.sen(\omega t).\omega^2$$ ← 2º derivada do seno

Fazendo a segunda derivada do co-seno temos:

$$\frac{d^2(C1.\cos(\omega t))}{dt^2}=-C1.\cos(\omega t).\omega^2$$

Desse modo juntando tudo temos:

$$\frac{K}{m}.C1.sen(\omega t) + \frac{K}{m}.C1.\cos(\omega t) - C1.sen(\omega t).\omega^2 - C2.\cos(\omega t).\omega^2 = 0$$

Ora para que a soma resulte sempre 0 é necessário que:

$$\frac{K}{m}.C1.sen(\omega t) = C1.sen(\omega t).\omega^2$$

$$\frac{K}{m}.C2.\cos(\omega t) = C2.\cos(\omega t).\omega^2$$

Quando t=0, temos:

$$\frac{K}{m}.\cancel{C1}.\overbrace{sen(0)}^{0} = \cancel{C1}.\overbrace{sen(0)}^{0}.\omega^2 \longrightarrow 0 = 0$$

$$\frac{K}{m}.\cancel{C2}.\overbrace{\cos(0)}^{1} = \cancel{C2}.\overbrace{\cos(0)}^{1}.\omega^2 \longrightarrow \frac{K}{m} = \omega^2 \Rightarrow \sqrt{\frac{K}{m}} = \omega$$

Condições de contorno:

$$X(t=0)=X_0$$

$$V(t=0)=V_0$$

$$X= C1*sen(\omega t)+C2*cos(\omega t)$$

$$X_0= C1*\overset{0}{\overbrace{sen(\omega 0)}}+C2*\overset{1}{\overbrace{cos(\omega 0)}}$$

$$X_0= C2$$

$X = C1 * sen(\omega t) + C2 * cos(\omega t)$

$$V = dx/dt$$

$V = C1.cos(\omega t).\,\omega - C2.sen(\omega t).\,\omega$

$V_0 = C1.co\cancelto{1}{s(\omega 0)}.\,\omega - C2.se\cancelto{0}{n(\omega 0)}.\,\omega$

$V_0 = C1.\omega$

$V_0 / \omega = C1$

$$\frac{V_0}{\omega} = C1 \Rightarrow V_0 . \sqrt{\frac{m}{K}} = C1$$

Temos então a função resultante:

$$X = V_0 . \sqrt{\frac{m}{k}} .sen(\omega .t) + Xo.\cos(\omega .t)$$

$$X = V_0 . \sqrt{\frac{m}{k}} .sen(\sqrt{\frac{k}{m}} .t) + Xo.\cos(\sqrt{\frac{k}{m}} .t)$$